Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 16. Januar 2019 – Prüfer: Etschberger, Henle, Jansen, Wesp
Studiengang: BW, IM
Punkte: 19, 13, 13, 15, 19, 11 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 19 Punkte

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 2n^2 + n$$

R b) Geben Sie R-Code an, mit dem die Summe $\sum_{k=1}^{1000}(3k+2)$ berechnet wird.

c) Zeigen Sie durch einen direkten Beweis, dass für alle $a, b > 0$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

d) Bei einer Gruppe von n Beschäftigten in einer Fabrik ist bekannt, dass von diesen genau

- 525 die Schweizer Staatsbürgerschaft besitzen,
- 312 Männer,
- 470 verheiratet,
- 42 Schweizer und Männer,
- 147 verheiratete Schweizer,
- 86 verheiratete Männer und
- 25 verheiratete Schweizer Männer sind.

1. Wieviele Beschäftigte muss die Fabrik mindestens haben?

Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe d1) nicht lösen können rechnen Sie mit der (falschen) Mindestbeschäftigtenzahl von 1007 weiter.

2. Geben Sie die Anzahl der in der Fabrik beschäftigten unverheirateten Frauen an, die keine Schweizer Staatsbürgerschaft besitzen, wenn dort genau 1200 Beschäftigte arbeiten.

Lösungshinweis:

a) ► Induktionsanfang: $A(1) : \sum_{k=1}^{1}(4k-1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 = 2 \cdot 1^2 + 1$

► Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 2n^2 + n$.

Induktionsschluss: $$\sum_{k=1}^{n+1}(4k-1) = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + (4(n+1)-1) = 2n^2 + n + (4(n+1)-1)$$
$$= 2n^2 + n + 4n + 4 - 1 = 2n^2 + 5n + 3$$
$$= 2(n+1)^2 + (n+1)$$

b)
```
a.i = function(i) { 4*i - 1 }
sum.n = function(n) { sum( a.i( 1:n ) )}
sum.n(1000)
```

```
## [1] 2001000
```

c) $$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)^2 \geq 0.$$

d)

1. Für drei beliebige endliche Mengen A, B, C gilt

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

   Einsetzen der gegebenen Zahlen ergibt

$$525 + 312 + 470 - 42 - 147 - 86 + 25 = 1057\,.$$

   Es sind also mindestens 1057 Beschäftigte.

2. $1200 - 1057 = 143$ unverheiratete Nicht-Schweizerinnen.

Aufgabe 2 **13 Punkte**

Der Stadtrat von Waldburghausen hat beschlossen einen trapezförmigen Wald zu pflanzen. In der ersten Reihe sind 110 Bäume geplant, in jeder der folgenden Reihen sollen jeweils 10 Bäume mehr stehen als in der vorherigen, also 120 in der zweiten Reihe, 130 in der dritten usw.

a) Wie viele Bäume stehen insgesamt in den ersten 20 Reihen?

b) Wie viele Baumreihen müssen nach diesem Schema mindestens gepflanzt werden, wenn insgesamt 16 560 Bäume gepflanzt werden sollen?

c) Wie viele Bäume müssten bei einem Zuwachs von 10 Bäumen pro Reihe in der ersten Reihe stehen, wenn 20 000 Bäume gepflanzt werden sollen, aber nur insgesamt für 40 Reihen Platz ist?

Lösungshinweis:

Für die arithmetische Reihe (s_n) der in n (Baum-)Reihen gepflanzten Bäume gilt:

$$\begin{aligned} s_n &= \underbrace{a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \cdots (a_0 + (n-1)d)}_{\text{insgesamt } n \text{ Baumreihen}} \\ &= n \cdot a_0 + d(1 + 2 + 3 + (n-1) \cdot d) = n \cdot a_0 + \frac{d}{2} \cdot (n-1) \cdot n. \end{aligned}$$

a) In diesem Fall ist nach s_n gefragt mit $a_0 = 110$ und $d = 10$. Es ergibt sich:

$$s_n = 20 \cdot 110 + \frac{10}{2} \cdot 19 \cdot 20 = 4\,100.$$

b) n ist gesucht. Damit ergibt sich: $16\,650 = 110n + \frac{10}{2}(n-1)n$.
Diese quadratische Gleichung $5n^2 + 105n - 16\,650 = 0 \iff n^2 + 21n - 3\,330 = 0$ hat die relevante Lösung $n_1 = 48$ ($n_2 = -69$ macht keinen Sinn).

c) $20\,000 = 40 \cdot a_0 + \frac{10}{2} \cdot 39 \cdot 40 \quad \iff \quad a_0 = 305.$

Aufgabe 3 **13 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $F: D_f \to \mathbb{R}$ mit $D_F \subseteq \mathbb{R}$ und $F(x) = \ln(4 - x^2)$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_F von F an.

b) Berechnen Sie die Nullstellen von F.

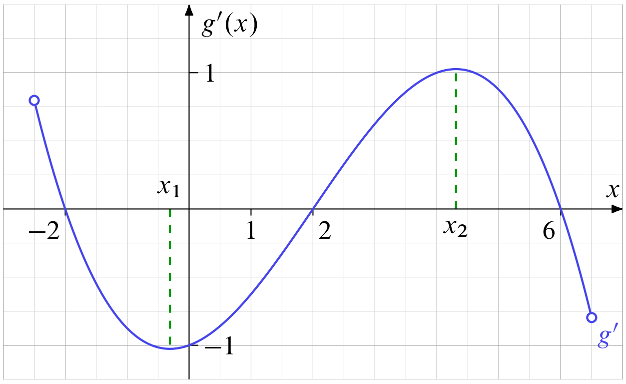
c) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion einer Funktion f ist mit

$$f(x) = -\frac{2x}{4 - x^2}.$$

R

d) Geben Sie ein R-Kommando an, mit dem der Graph von f im Intervall [-1.5, 1.5] ausgegeben wird.

Die folgenden drei Teilaufgaben beziehen sich auf eine neue Funktion $g: (-2.5, 6.5) \to \mathbb{R}$, wobei der Graph der ersten Ableitung $g'(x)$ in der nebenstehenden Abbildung gegeben ist.



Für welche x ist die Funktion g

e) streng monoton fallend bzw. wachsend,

f) lokal maximal bzw. minimal,

g) streng konvex bzw. konkav?

Lösungshinweis:

a) $D_F = (-2, 2)$

b) Nullstellen: $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$

c) $F'(x) = \frac{1}{4 - x^2} \cdot -2x$

d)
```
curve(-2*x/(4-x^2), from=-1.5, to=1.5)
```

e) Für $x \in (-2.5, -2) \cup (2, 6)$ ist g str. mon. steigend,
für $x \in (-2, 2) \cup (6, 6.5)$ ist g str. mon. fallend.

f) lok. Max. bei $x = -2, 6$, lok. Min. bei $x = 2$.

g) str. konkav für $x \in (-2.5, x_1) \cup (x_2, 6.5)$,
str. konvex für $x \in (x_1, x_2)$,

Aufgabe 4 **15 Punkte**

Titus möchte seinen Ruhestand finanzieren.

Zu diesem Zweck möchte er regelmäßig pro Quartal vorschüssig einen Betrag in Höhe von 24 390.24 € insgesamt 22 Jahre lang auf ein mit 4% p.a. verzinstes Konto einzahlen.

a) Berechnen Sie den nach dieser Zeit angesparten Betrag.

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen können rechnen Sie mit dem (falschen) Betrag 1 712 398.49 € *weiter.*

b) Wieviele Wochen kann Titus direkt im Anschluss an die Ansparphase pro Woche nachschüssig 4134.81 € von diesem Konto entnehmen, bis der Kontostand 0 € beträgt?

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Jahr aus genau 52 Wochen besteht.

Lösungshinweis:

Anzahl.Raten.A	88.00
Anzahl.Raten.E	1300.00
re.E	219227.97
Rn.A	3424796.97
Rn.A.falsch	1712398.49
n.e.falsch	496.67

Aufgabe 5 — 19 Punkte

Gegeben sind die Matrizen A, B, die inverse Matrix M^{-1} einer Matrix M sowie der Vektor b mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Im Allgemeinen gilt bei der Multiplikation von Matrizen $A \cdot B \neq B \cdot A$. Welche Bedingung müssen die Parameter e und f der Matrix B erfüllen, damit $A \cdot B = B \cdot A$ gilt?

b) Berechnen Sie die Inverse Matrix A^{-1} der Matrix A.

c) Bestimmen Sie die Lösung $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ des Gleichungssystems $M \cdot x = b$, ohne die Matrix M zu berechnen.

d) Geben Sie für folgende lineare Gleichungssysteme die Anzahl der möglichen Lösungen an. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen.

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

R

e) Geben Sie einen R-Ausdruck an, mit dem das Ergebnis der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

berechnet und in der Variablen X gespeichert wird.

Lösungshinweis:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ -3e & f \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ -3f & f \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e = f.$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{Gauß und Jordan}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 1 \end{array}\right)$

oder: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $x = M^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

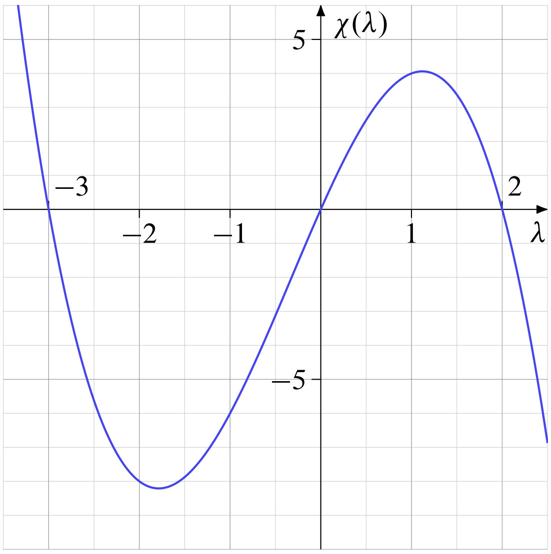
d) (i) genau eine Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$
(ii) unendlich viele Lösungen: z.B. $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$
(iii) keine Lösung.

e)
```
A = matrix(c( 1, 0,
             -1, 2 ),
           byrow=T, nrow=2)
B = matrix(c(  1, 2,  3,
              -1, 0, -5),
           byrow=T, nrow=2)
X = A %*% B
```

Aufgabe 6 **11 Punkte**

Zur Bestimmung von Eigenwerten einer quadratischen Matrix M betrachtet man die Nullstellen des sogenannten charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda)$ mit

$$\chi(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E)\,.$$



Im nebenstehend dargestellten Graphen von $\chi(\lambda)$ sind alle Nullstellen von χ enthalten. χ besitzt nur einfache Nullstellen.

a) Welchen Grad hat $\chi(\lambda)$?
   Begründung Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie sämtliche Eigenwerte von M an.

c) Bestimmen Sie $\chi(\lambda)$.
   (*Hinweis: Der Vorfaktor vor λ^3 beträgt -1.*)

(*Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe c) nicht lösen können, rechnen Sie bitte in Teilaufgabe d) mit dem (falschen) Polynom $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda$ weiter.*)

Betrachtet werden im Folgenden die Matrizen A, B, C, D, zu denen die folgenden Eigenschaften bekannt sind:

- A ist eine 4×4-Matrix
- B ist eine symmetrische Matrix
- C hat drei Spalten und vier Zeilen
- D ist eine invertierbare Matrix

d) Begründen Sie, zu welcher Matrix das in Teilaufgabe c) berechnete Polynom das charakteristische Polynom sein kann und zu welchen nicht!

Gegeben sei nun die 3×3-Matrix P. Der Vektor $v = (a, b, c)^T$ sei ein Eigenvektor von P. Außerdem gelte: $P \cdot v = (2b, b, c)^T$.

e) Wie lautet der Eigenwert zum Eigenvektor v?

f) Drücken Sie b in Abhängigkeit von a aus!

Lösungshinweis:

a) Anzahl der Nullstellen entspricht dem Grad, also ist der Grad gleich 3.

b) Die Eigenwerte sind die Nullstellen, also $\lambda \in \{-3, 0, 2\}$

c) Die Faktorisierung lautet: $-\lambda \cdot (\lambda - 2)(\lambda + 3)$. Achtung: Das Minus ist wichtig und aus der Zeichnung entnehmbar (siehe Grenzwertbetrachtungen). Es gilt ja für das Polynom 3. Grades
   $\det(A - \lambda E) = (-1)^3 \det(\lambda E - A)$.

d) Die Matrix A hat ein char. Polynom vom Grad 4. Matrix C besitzt kein char. Polynom, da nicht quadratisch und Matrix D impliziert Eigenwerte ungleich von 0. Matrix B bleibt damit übrig - die Symmetrie ist dabei nicht von Bedeutung.

e) Aufgrund der zweiten Koordinate gilt offensichtlich $\lambda = 1$.

f) Da $\lambda = 1$ gilt, folgt aus der ersten Koordinate die Gleichung $a = 1 \cdot a = 2b$ und damit $b = a/2$.