Hochschule Augsburg - Fakultät AW

Professur für
Wirtschaftsmathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Etschberger

Vorname: -

Nachname: -

Matrikel-Nr.: -

Studiengang: -

Versuch Nr.: -

Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

Prüfer	Etschberger, Henle, Wesp
Prüfungsdatum	8. Juli 2019
Prüfungsort	Augsburg
Studiengang	BW, IM
Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Punkte:	90
Die Klausur umfasst	6 Aufgaben auf 17 Seiten
Zugelassene Hilfsmittel	Schreibzeug, Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann, ein mit dem Namen versehenes Din-A4 Blatt mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke)

Weitere Regularien:

- Bitte überprüfen Sie *vor* Bearbeitungsbeginn die Vollständigkeit der Klausurangabe.
- Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein.
- Die Heftung der Klausur darf nicht verändert werden.
- Bitte tragen Sie die Lösung zu den jeweiligen Aufgaben *nur* direkt im Anschluss an die jeweilige Angabe ein. Sollte der Platz dort nicht ausreichen, verwenden Sie die Ersatzblätter am Ende der Klausurangabe.
- Ergebnisse (auch Zwischenergebnisse) müssen mit mind. 4 gültigen Ziffern angegeben werden.
- Der Lösungsweg muss klar dokumentiert werden.
- Die Klausur ist in ordentlich lesbarer Form zu bearbeiten. Schwer lesbare Teile der Klausur werden als ungültig ersatzlos gestrichen.
- Die Klausur unterliegt der für Sie zur Zeit gültigen Prüfungsordnung.
- Bitte verwenden Sie *keine rote Farbe* zur Bearbeitung der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte						
maximal	19	12	20	15	15	9

Aufgabe 1 **19 Punkte**

a) Augustus De Morgan hat 1847 gezeigt, dass für zwei Mengen A, B die Gleichung

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

gilt. Zeigen Sie (z.B. mit zwei verschiedenen Farben) diese Gleichheit in einem Venn-Diagramm.

b) Übertragen auf die Aussagenlogik lautet das Gesetz von De Morgan für zwei Aussagen A, B:

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle diese Äquivalenz.

c) Eine Gerade zerteilt eine Ebene in 2 Gebiete.

(1) In wie viele Gebiete zerteilen 2 bzw. 3 Geraden einer Ebene diese jeweils maximal? Begründen Sie Ihre beiden Antworten jeweils mit einer Skizze.

(2) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist:

$$A(n) : n \text{ Geraden einer Ebene zerteilen diese maximal in } \frac{n^2+n}{2} + 1 \text{ Gebiete.}$$

Aufgabe 2 **12 Punkte**

Gegeben sind die Reihen (s_n), (t_n), (u_n), (v_n) mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} 100 \cdot \frac{99^{k+1}}{100^k} \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{20k^3 + 0.01k^4}{0.001k^4 + k^{3.99}}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n+3}$$

a) Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob diese Reihen konvergieren.
Hinweis: Ohne (korrekte) Begründung gibt es keine Punkte.
Achtung: Bei v_n sind alle Summanden gleich groß

b) Berechnen Sie ggf. den Grenzwert von (s_n), (t_n), (v_n).

Aufgabe 3 **20 Punkte**

Gegeben sei für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ die abschnittsweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)(x-a) & \text{für } x \leq 0 \\ (x-1)(x-3) & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

a) Für welchen Wert von a ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung von f für $x \neq 0$.

Für die Aufgabenteile c), d) beträgt der Wert der Konstante $a = 2$.

c) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ im Bereich $x \in [-4, 4]$.

d) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Abszisse im Bereich von $-1 \leqq x \leqq 1$.

Aufgabe 4 **15 Punkte**

Heidi und Tom wollen heiraten. Für ihr Hochzeitsfest im kleinsten Kreise wollen sie einen Kredit in Höhe von 12 000 000 € aufnehmen und innerhalb von 20 Jahren zu einem Jahreszins von 2 % annuitätisch tilgen.

a) Wie hoch ist die Annuität bei jährlichen Zahlungen?

b) Ermitteln Sie die Restschuld nach 10 Jahren.

c) Geben Sie die 11. Zeile des Tilgungsplans an.

d) Wie lange müssten Heidi und Tom den Kredit zurückzahlen, wenn Sie sich nur eine Annuität von 300 000 € leisten könnten.

Aufgabe 5 **15 Punkte**

Auf einem Markt konkurrieren zum Zeitpunkt $t = 1$ insgesamt 3 Produkte P_1, P_2 und P_3 mit den jeweiligen Marktanteilen von $x_1^T = (0, 0, 1)$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

charakterisiert die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten, dabei sei $a_{ij} \in [0, 1]$ der Anteil an Käufern von Produkt P_i zum Zeitpunkt t, der zum Zeitpunkt $t + 1$ zu Produkt P_j wechselt.

a) Interpretieren Sie die Koeffizienten a_{12} und a_{33} der Matrix A.

b) Berechnen Sie die Marktanteile der 3 Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2$ und $t = 3$.

Langfristig ergeben sich stabile Marktanteile, wenn sich das Wechselverhalten der Käufer, beschrieben durch die Matrix A, im Zeitablauf nicht ändert, also die Gleichung

$$x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = x_t^T \quad \Leftrightarrow \quad A^T \cdot x = 1 \cdot x$$

erfüllt ist. Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ der Matrix A^T beschreibt also genau diesen stabilen Marktzustand x^T.

c) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung des Eigenvektors zu A^T und $\lambda = 1$ auf.

d) Für den stabilen Marktzustand $x^T = (a, b, c)$ ist bekannt, dass $a = \frac{5}{23}$ (Diesen Wert müssen Sie nicht nachrechnen). Bestimmen Sie b, c.

   Hinweis: Benutzen Sie nicht den Gaußalgorithmus, sondern setzen Sie den schon gegebenen Wert in das Gleichungssystem ein.

Aufgabe 6 **9 Punkte**

Reelle $n \times n$ Matrizen, deren Determinante 1 beträgt, werden auch unimodulare Matrizen genannt.

Gegeben ist eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 2b \\ 0 & -5 & 3b & 0 \\ -3b & -4b & 0 & 3b \end{pmatrix}.$$

Für welche b ist A eine unimodulare Matrix?