

Vorname: .....

Nachname: .....

Matrikel-Nr.: .....

Studiengang: .....

Versuch Nr.: .....

## Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

---

Prüfer	Etschberger, Henle, Wesp
Prüfungsdatum	8. Juli 2019
Prüfungsort	Augsburg
Studiengang	BW, IM

---

Bearbeitungszeit: 90 Minuten  
Punkte: 90

---

Die Klausur umfasst 6 Aufgaben auf 17 Seiten

---

Zugelassene Hilfsmittel Schreibzeug, Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann,  
ein mit dem Namen versehenes Din-A4 Blatt mit handgeschriebenen Notizen  
(keine Kopien oder Ausdrucke)

---

Weitere Regularien:

- ▶ Bitte überprüfen Sie *vor* Bearbeitungsbeginn die Vollständigkeit der Klausurangabe.
  - ▶ Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein.
  - ▶ Die Heftung der Klausur darf nicht verändert werden.
  - ▶ Bitte tragen Sie die Lösung zu den jeweiligen Aufgaben *nur* direkt im Anschluss an die jeweilige Angabe ein. Sollte der Platz dort nicht ausreichen, verwenden Sie die Ersatzblätter am Ende der Klausurangabe.
  - ▶ Ergebnisse (auch Zwischenergebnisse) müssen mit mind. 4 gültigen Ziffern angegeben werden.
  - ▶ Der Lösungsweg muss klar dokumentiert werden.
  - ▶ Die Klausur ist in ordentlich lesbarer Form zu bearbeiten. Schwer lesbare Teile der Klausur werden als ungültig ersatzlos gestrichen.
  - ▶ Die Klausur unterliegt der für Sie zur Zeit gültigen Prüfungsordnung.
  - ▶ Bitte verwenden Sie *keine rote Farbe* zur Bearbeitung der Klausur.
- 

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte	<input type="text"/>					
maximal	19	12	20	15	15	9

## Aufgabe 1

19 Punkte

- a) Augustus De Morgan hat 1847 gezeigt, dass für zwei Mengen  $A, B$  die Gleichung

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

gilt. Zeigen Sie (z.B. mit zwei verschiedenen Farben) diese Gleichheit in einem Venn-Diagramm.

- b) Übertragen auf die Aussagenlogik lautet das Gesetz von De Morgan für zwei Aussagen  $A, B$ :

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}.$$

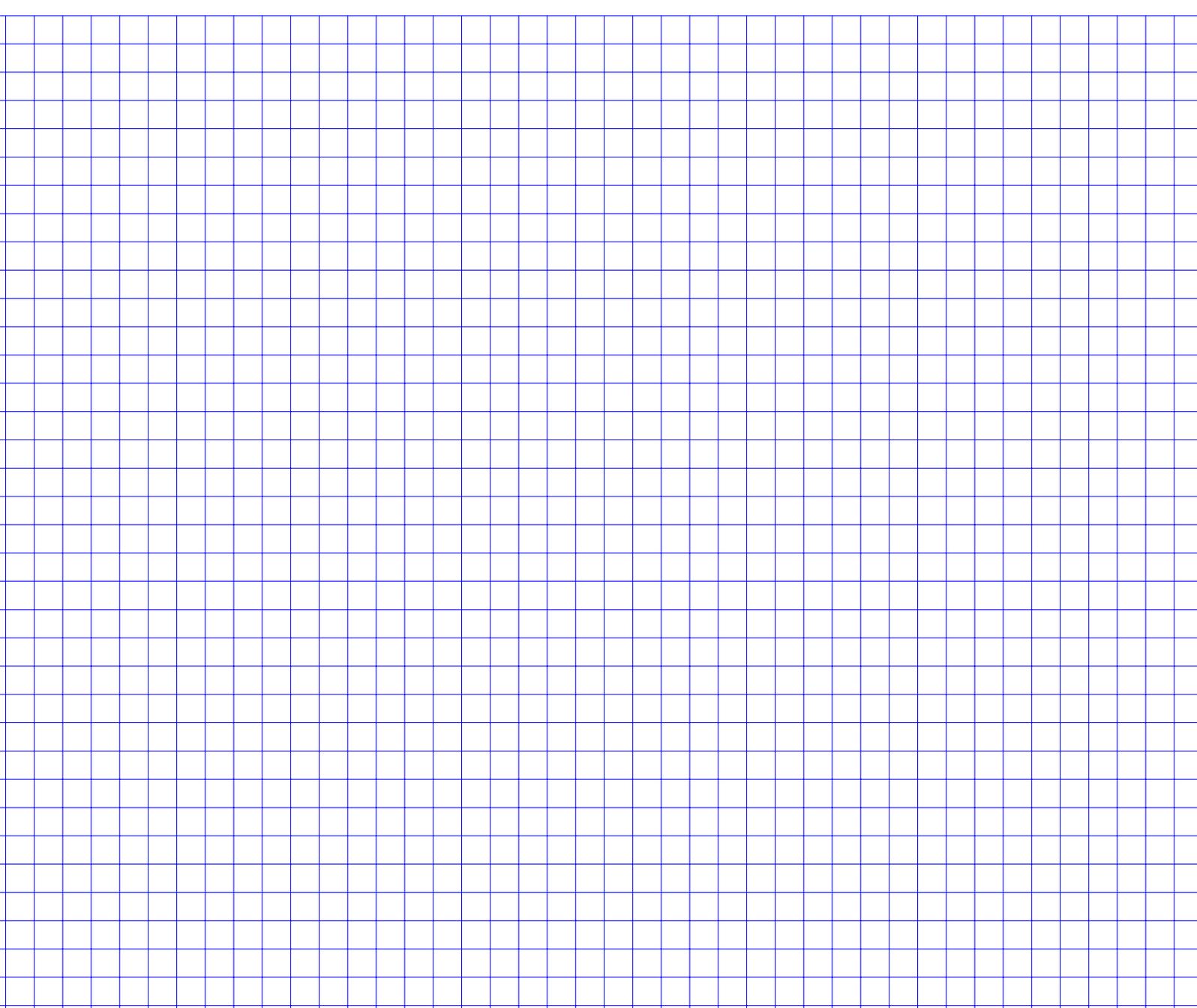
Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle diese Äquivalenz.

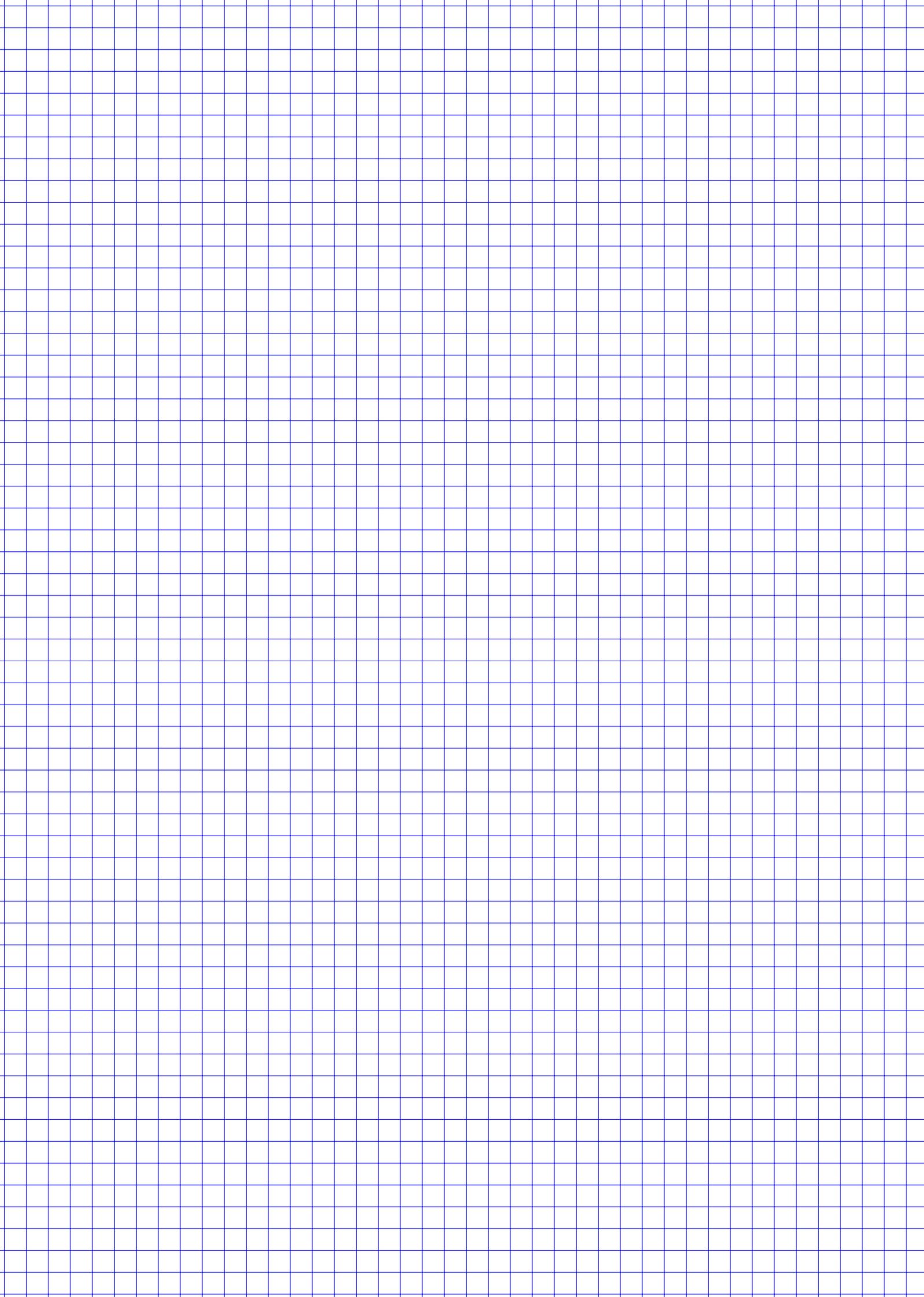
- c) Eine Gerade zerteilt eine Ebene in 2 Gebiete.

(1) In wie viele Gebiete zerteilen 2 bzw. 3 Geraden einer Ebene diese jeweils maximal? Begründen Sie Ihre beiden Antworten jeweils mit einer Skizze.

(2) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass folgende Aussage für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr ist:

$A(n)$  :  $n$  Geraden einer Ebene zerteilen diese maximal in  $\frac{n^2 + n}{2} + 1$  Gebiete.





## Aufgabe 2

12 Punkte

Gegeben sind die Reihen  $(s_n)$ ,  $(t_n)$ ,  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  mit

$$s_n = \sum_{k=0}^n 100 \cdot \frac{99^{k+1}}{100^k}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^n \frac{20k^3 + 0.01k^4}{0.001k^4 + k^{3.99}}$$

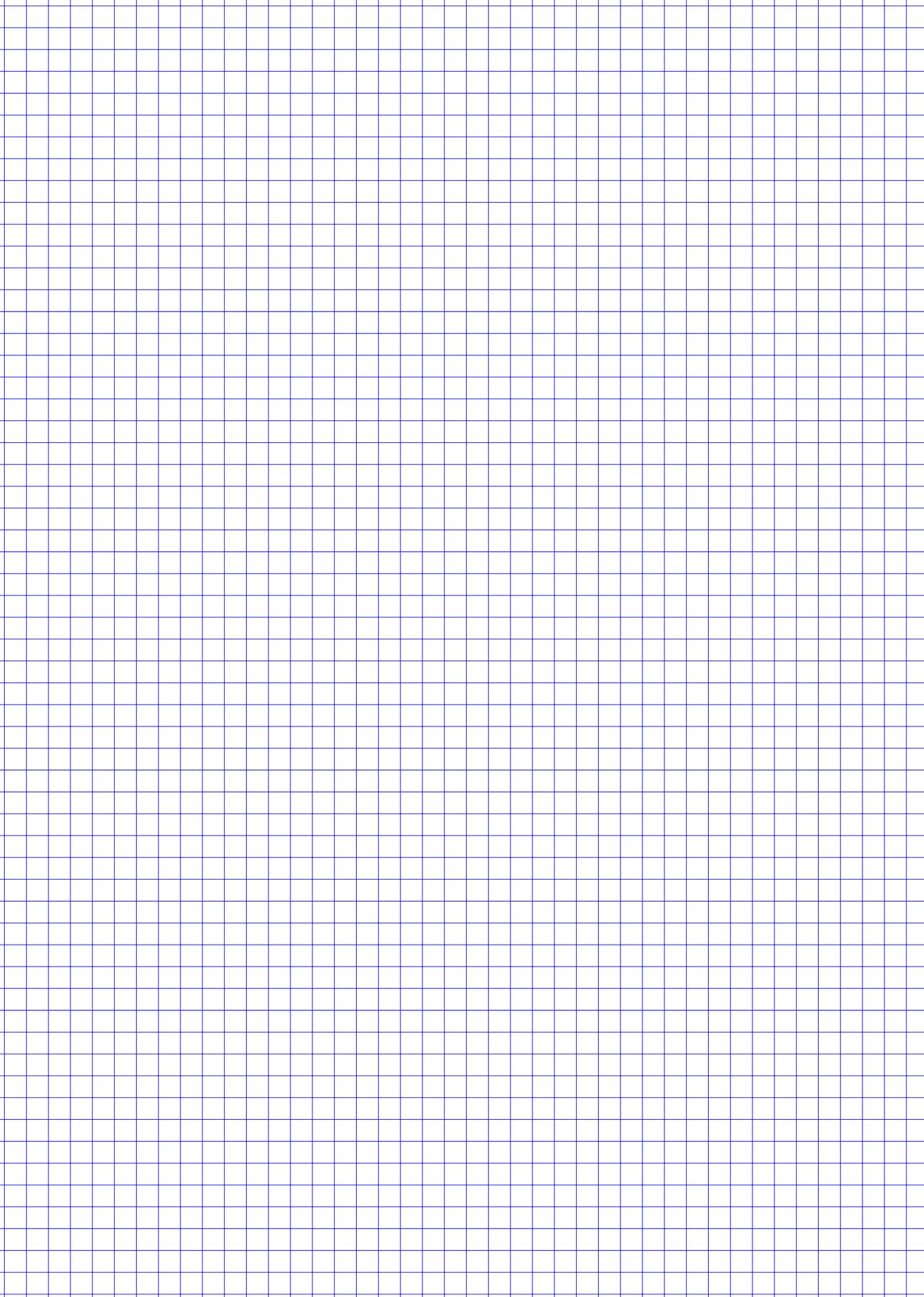
$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{3}{n+3}$$

- a) Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob diese Reihen konvergieren.

*Hinweis: Ohne (korrekte) Begründung gibt es keine Punkte.*

*Achtung: Bei  $v_n$  sind alle Summanden gleich groß*

- b) Berechnen Sie ggf. den Grenzwert von  $(s_n)$ ,  $(t_n)$ ,  $(v_n)$ .



### Aufgabe 3

20 Punkte

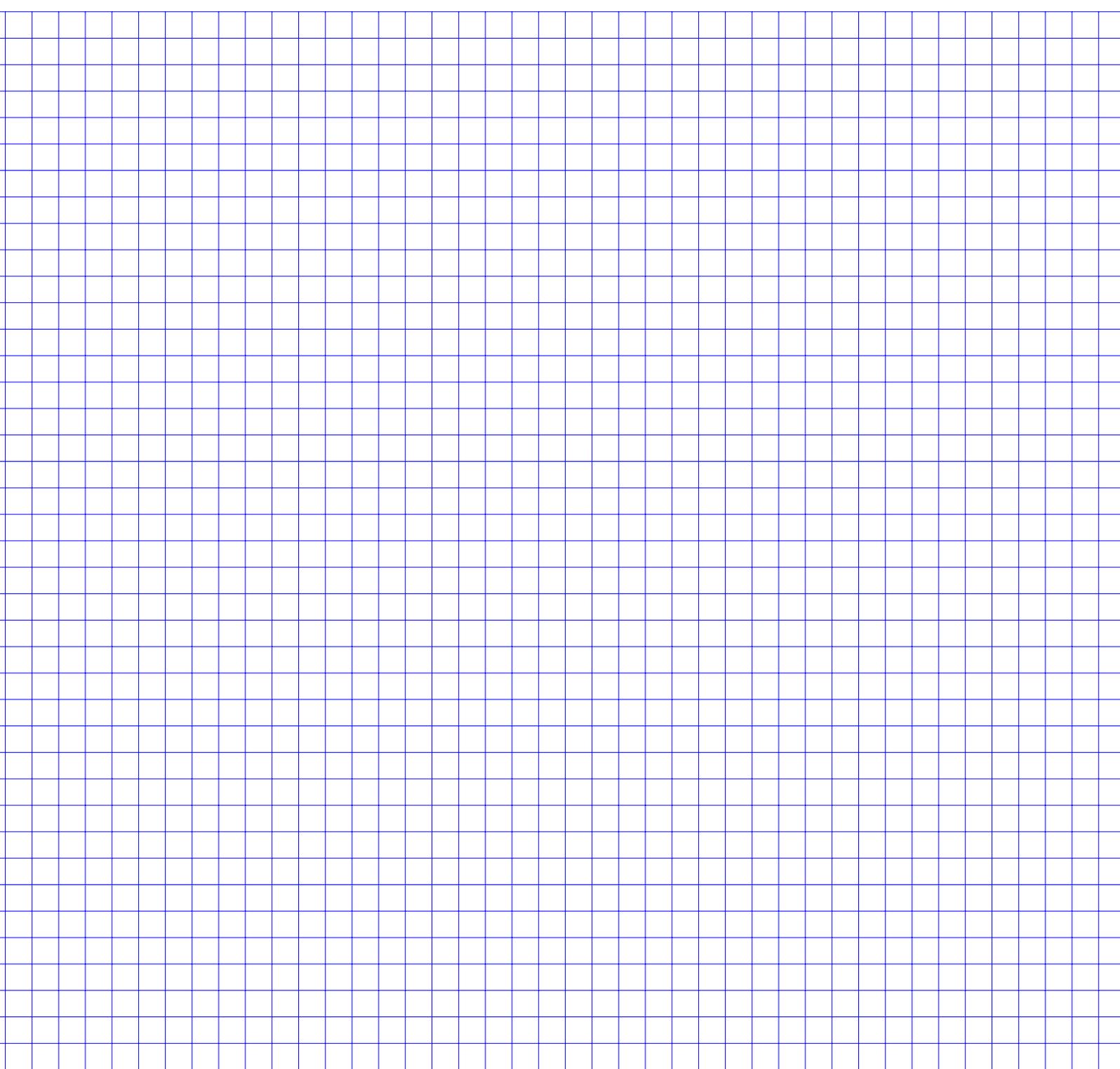
Gegeben sei für eine Konstante  $a \in \mathbb{R}$  die abschnittsweise definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

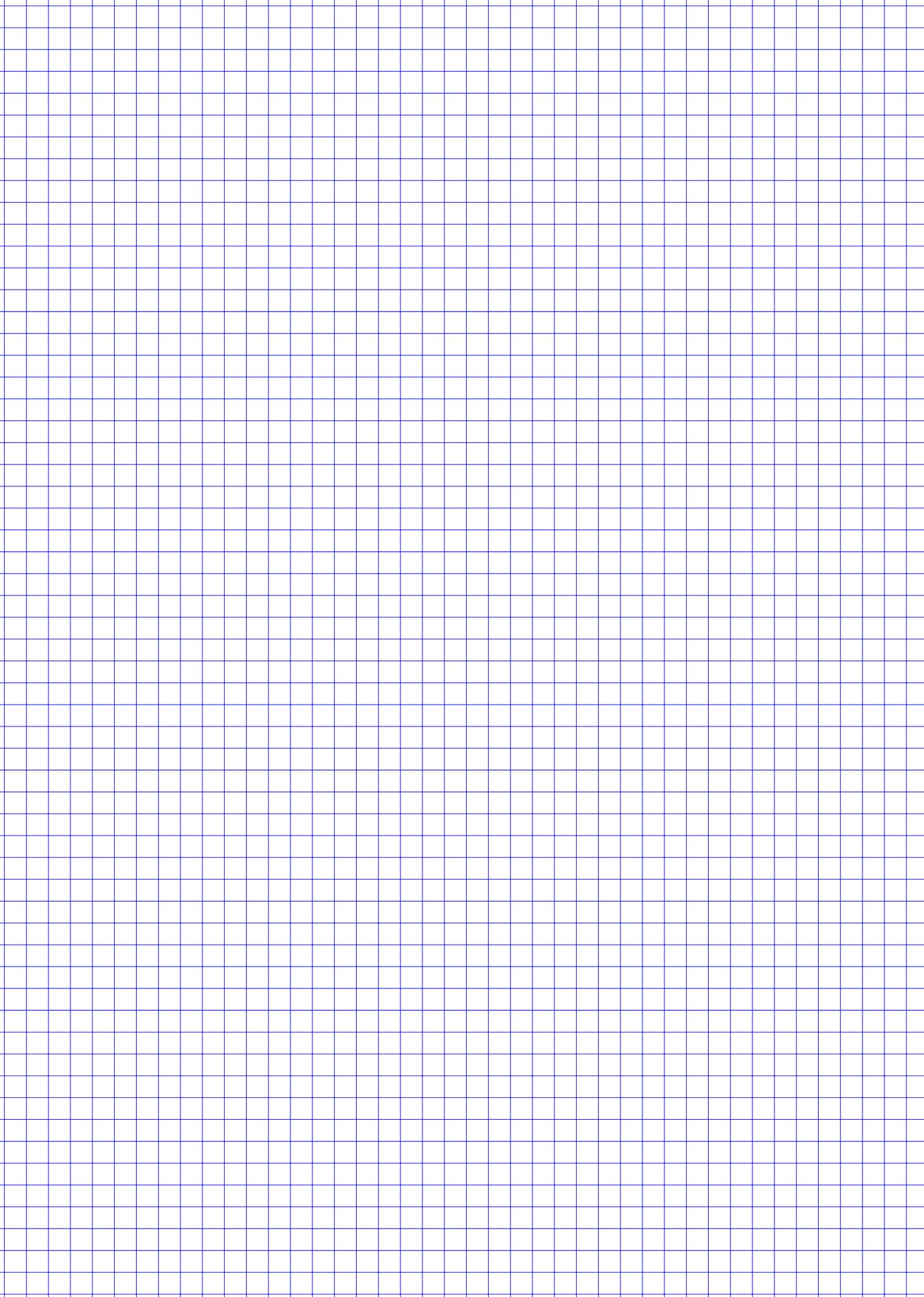
$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)(x-a) & \text{für } x \leq 0 \\ (x-1)(x-3) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

- Für welchen Wert von  $a$  ist  $f$  an der Stelle  $x = 0$  stetig?
- Berechnen Sie die erste Ableitung von  $f$  für  $x \neq 0$ .

Für die Aufgabenteile c), d) beträgt der Wert der Konstante  $a = 2$ .

- Skizzieren Sie den Graphen von  $f(x)$  im Bereich  $x \in [-4, 4]$ .
- Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der Abszisse im Bereich von  $-1 \leq x \leq 1$ .



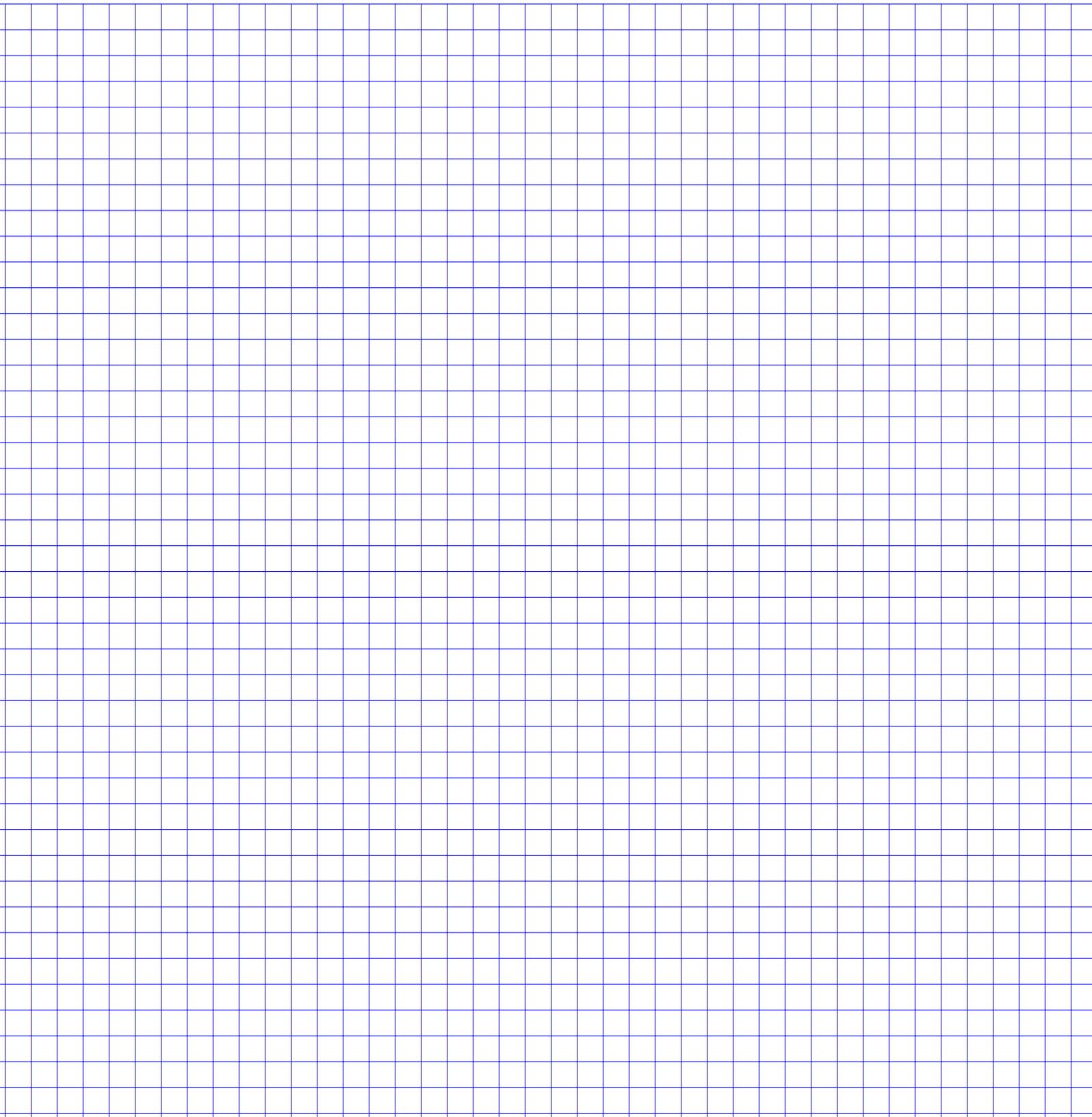


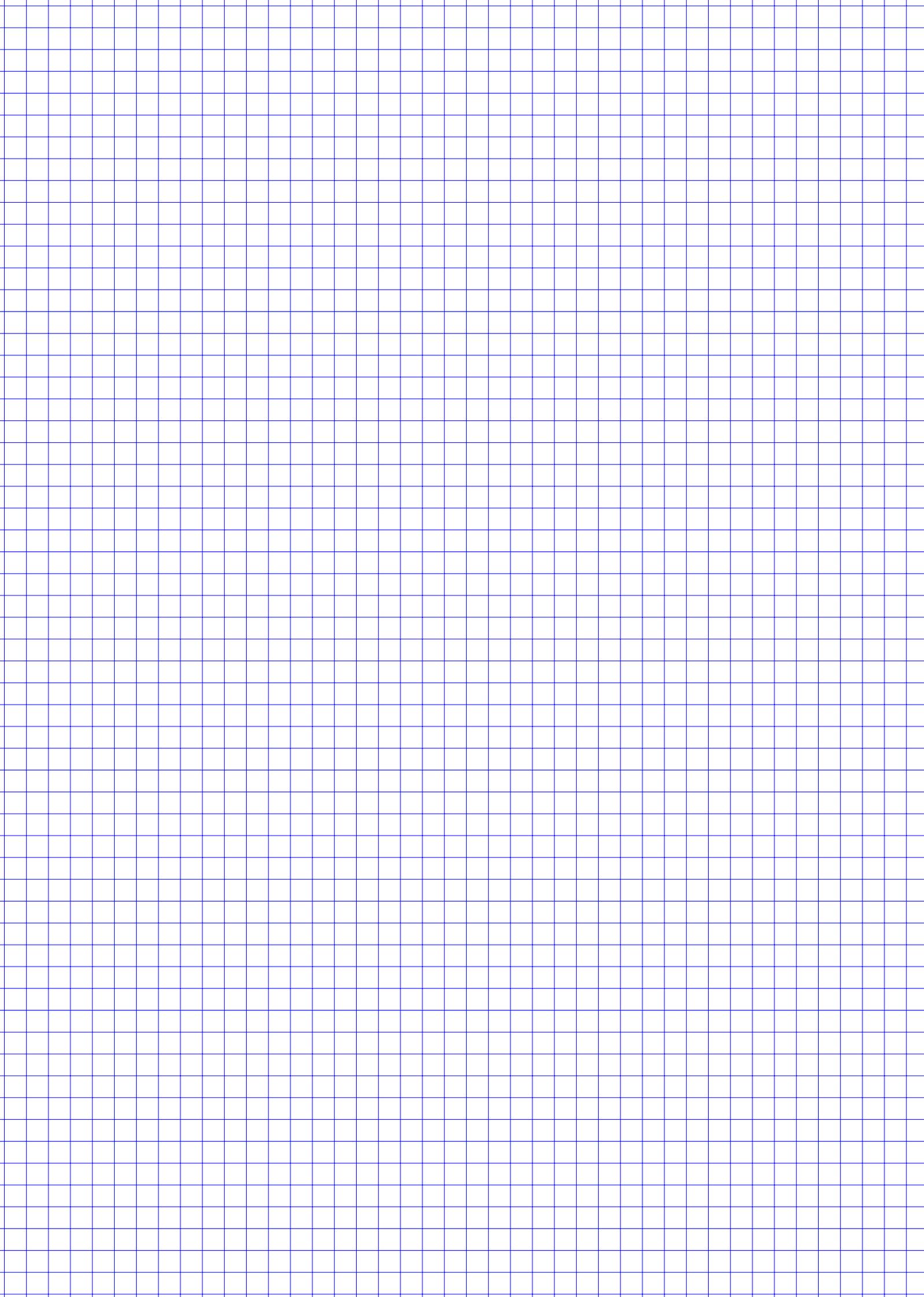
## Aufgabe 4

15 Punkte

Heidi und Tom wollen heiraten. Für ihr Hochzeitsfest im kleinsten Kreise wollen sie einen Kredit in Höhe von 12 000 000 € aufnehmen und innerhalb von 20 Jahren zu einem Jahreszins von 2 % annuitätisch tilgen.

- a) Wie hoch ist die Annuität bei jährlichen Zahlungen?
- b) Ermitteln Sie die Restschuld nach 10 Jahren.
- c) Geben Sie die 11. Zeile des Tilgungsplans an.
- d) Wie lange müssten Heidi und Tom den Kredit zurückzahlen, wenn Sie sich nur eine Annuität von 300 000 € leisten könnten.





## Aufgabe 5

15 Punkte

Auf einem Markt konkurrieren zum Zeitpunkt  $t = 1$  insgesamt 3 Produkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  mit den jeweiligen Marktanteilen von  $x_1^T = (0, 0, 1)$ . Die Matrix  $A = (a_{ij})_{3,3}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

charakterisiert die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten, dabei sei  $a_{ij} \in [0, 1]$  der Anteil an Käufern von Produkt  $P_i$  zum Zeitpunkt  $t$ , der zum Zeitpunkt  $t + 1$  zu Produkt  $P_j$  wechselt.

- Interpretieren Sie die Koeffizienten  $a_{12}$  und  $a_{33}$  der Matrix  $A$ .
- Berechnen Sie die Marktanteile der 3 Produkte zu den Zeitpunkten  $t = 2$  und  $t = 3$ .

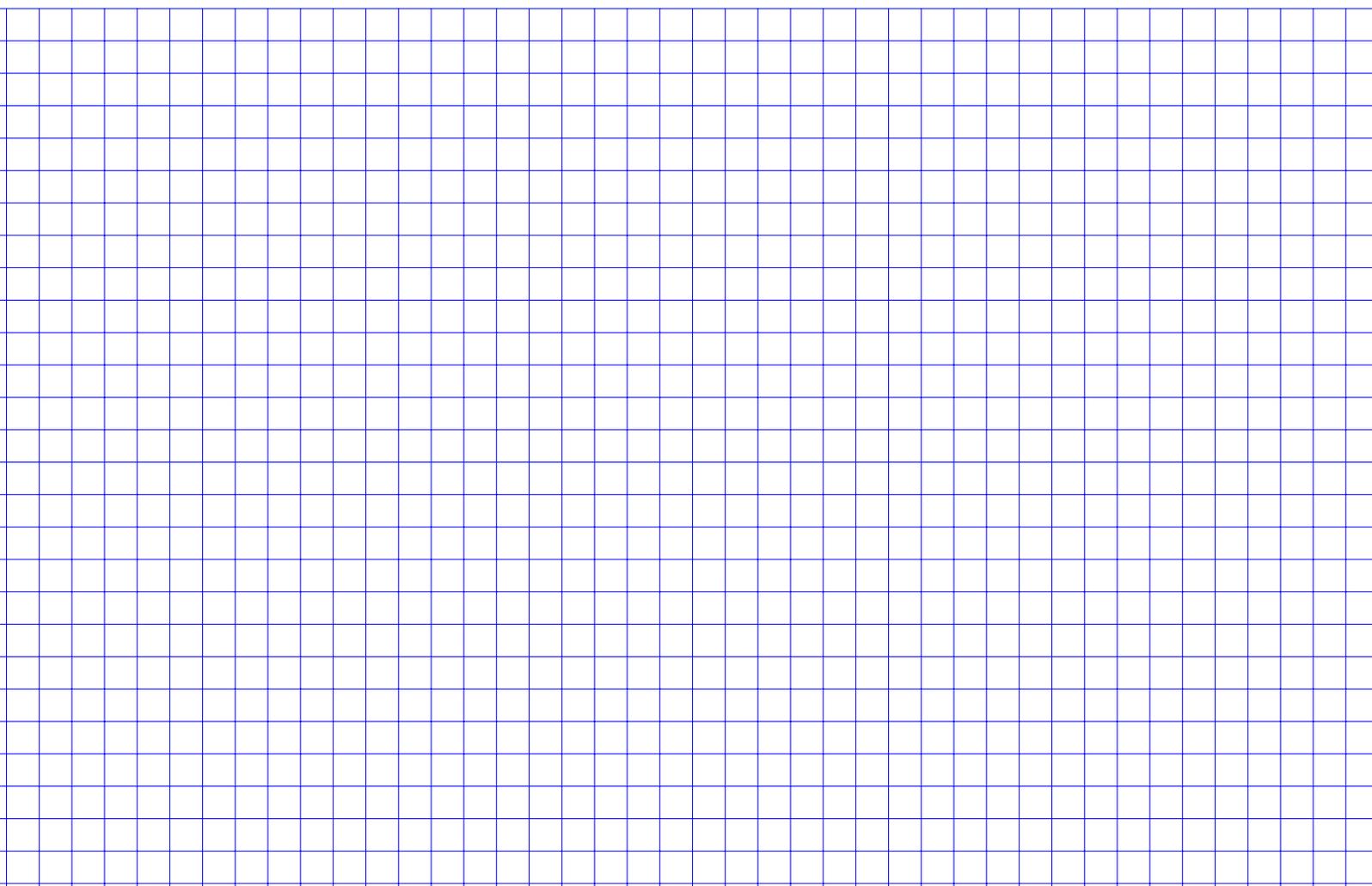
Langfristig ergeben sich stabile Marktanteile, wenn sich das Wechselverhalten der Käufer, beschrieben durch die Matrix  $A$ , im Zeitablauf nicht ändert, also die Gleichung

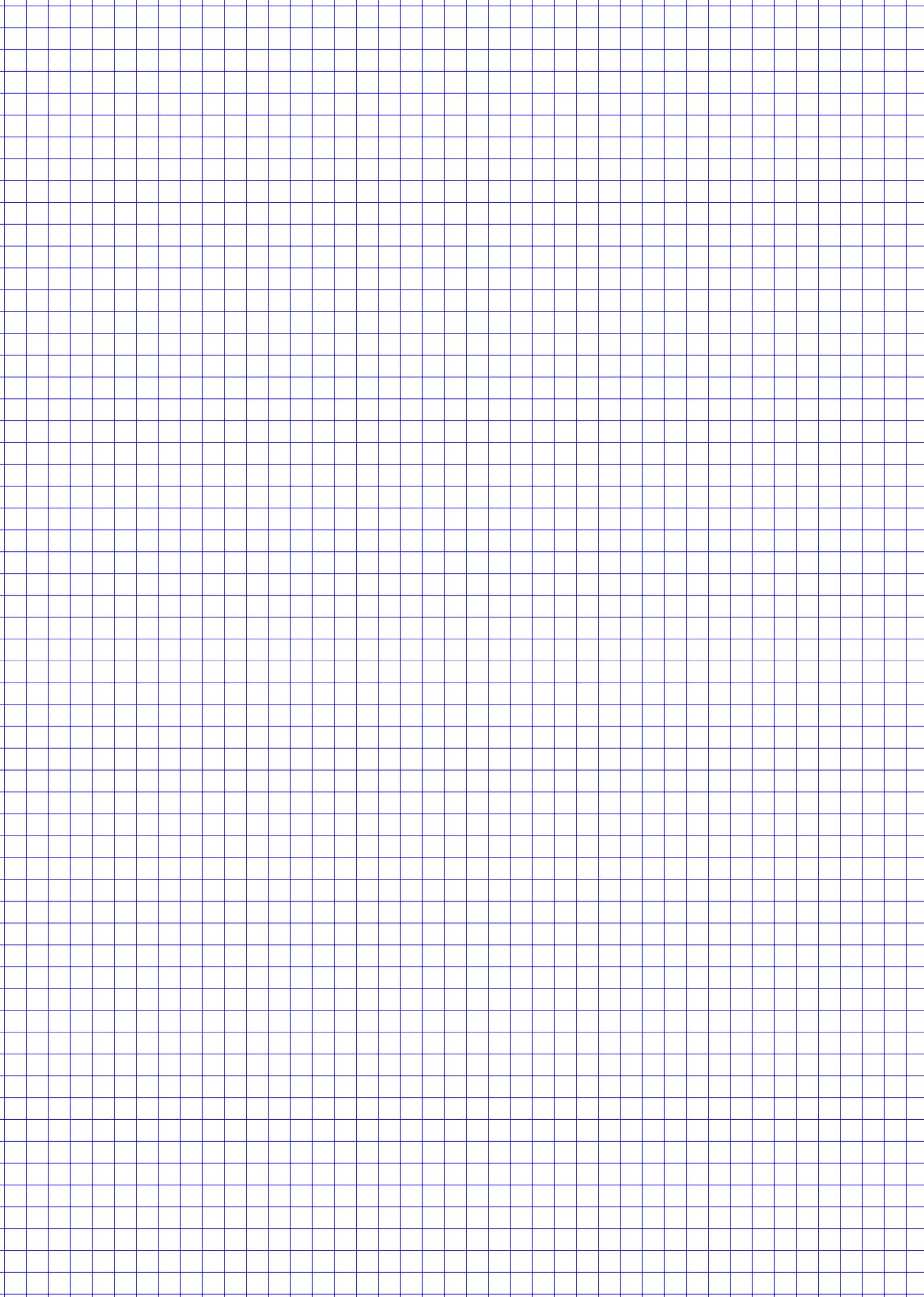
$$x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = x_t^T \quad \Leftrightarrow \quad A^T \cdot x = 1 \cdot x$$

erfüllt ist. Der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda = 1$  der Matrix  $A^T$  beschreibt also genau diesen stabilen Marktzustand  $x^T$ .

- Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung des Eigenvektors zu  $A^T$  und  $\lambda = 1$  auf.
- Für den stabilen Marktzustand  $x^T = (a, b, c)$  ist bekannt, dass  $a = \frac{5}{23}$  (Diesen Wert müssen Sie nicht nachrechnen). Bestimmen Sie  $b, c$ .

*Hinweis: Benutzen Sie nicht den Gaußalgorithmus, sondern setzen Sie den schon gegebenen Wert in das Gleichungssystem ein.*





**Aufgabe 6****9 Punkte**

Reelle  $n \times n$  Matrizen, deren Determinante 1 beträgt, werden auch unimodulare Matrizen genannt.

Gegeben ist eine Konstante  $b \in \mathbb{R}$  sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 2b \\ 0 & -5 & 3b & 0 \\ -3b & -4b & 0 & 3b \end{pmatrix}.$$

Für welche  $b$  ist  $A$  eine unimodulare Matrix?

