Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 8. Juli 2019 – Prüfer: Etschberger, Henle, Wesp
Studiengang: BW, IM
Punkte: 19, 12, 20, 15, 15, 9 ;   Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 19 Punkte

a) Augustus De Morgan hat 1847 gezeigt, dass für zwei Mengen A, B die Gleichung

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

gilt. Zeigen Sie (z.B. mit zwei verschiedenen Farben) diese Gleichheit in einem Venn-Diagramm.

b) Übertragen auf die Aussagenlogik lautet das Gesetz von De Morgan für zwei Aussagen A, B:

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle diese Äquivalenz.

c) Eine Gerade zerteilt eine Ebene in 2 Gebiete.

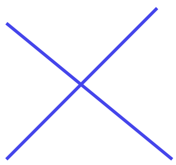
(1) In wie viele Gebiete zerteilen 2 bzw. 3 Geraden einer Ebene diese jeweils maximal? Begründen Sie Ihre beiden Antworten jeweils mit einer Skizze.

(2) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist:

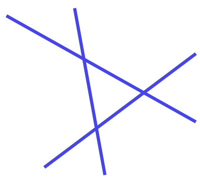
$$A(n) : n \text{ Geraden einer Ebene zerteilen diese maximal in } \frac{n^2+n}{2} + 1 \text{ Gebiete.}$$

Lösungshinweis:

(1) 2 Geraden: 4 Gebiete



3 Geraden: 7 Gebiete



(2) $A(1) : \dfrac{1^2+1}{2} + 1 = 2$
(2 Gebiete bei 1 Geraden: stimmt)
$n \to n+1$:
Einerseits gilt für $A(n+1)$:

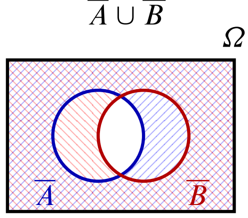
$$\frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2} + 1 = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 4\right)\,,$$

andererseits kommen beim Übergang von n nach $n+1$ insgesamt maximal $n+1$ neue Gebiete dazu, also

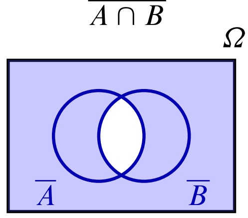
$$\frac{n^2+n}{2} + 1 \quad + \quad (n+1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(n^2 + n + 2 + 2n + 2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 4\right)$$

b)

$\overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{A \cap B}$



c) Wahrheitstabelle:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$\overline{A}$	f	f	w	w
$\overline{B}$	f	w	f	w
$\overline{A} \vee \overline{B}$	f	w	w	w
$A \wedge B$	w	f	f	f
$\overline{A \wedge B}$	f	w	w	w

Aufgabe 2 **12 Punkte**

Gegeben sind die Reihen (s_n), (t_n), (u_n), (v_n) mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} 100 \cdot \frac{99^{k+1}}{100^k} \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{20k^3 + 0.01k^4}{0.001k^4 + k^{3.99}}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n+3}$$

a) Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob diese Reihen konvergieren.
Hinweis: Ohne (korrekte) Begründung gibt es keine Punkte.
Achtung: Bei v_n sind alle Summanden gleich groß

b) Berechnen Sie ggf. den Grenzwert von (s_n), (t_n), (v_n).

Lösungshinweis:

a) Konvergenz:

- $s_n = 100 \cdot 99 \cdot \sum_{k=0}^{n} 0.99^k = 9900 \cdot \frac{1-0.99^{n+1}}{1-0.99} = 990\,000 \cdot \left(1 - 0.99^{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 990\,000$,
  also ist s_n konvergent

- $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{20}{k} + 0.01}{0.001 + k^{-0.01}} = \sum_{k=1}^{n} a_k$
  Damit ist (a_k) keine Nullfolge ($a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 10$) und t_n ist divergent.
- (u_n): Quotientenkriterium:
  $$\left| \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{3^k} \right| = \frac{3}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,,$$
  damit ist u_n konvergent.
- $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n+3} = n \cdot \frac{3}{n+3} = \frac{3}{1+\frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$
  also v_n ist konvergent.

b) Siehe oben.

Aufgabe 3 **20 Punkte**

Gegeben sei für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ die abschnittsweise definierte Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)(x-a) & \text{für } x \le 0 \\ (x-1)(x-3) & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

a) Für welchen Wert von a ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung von f für $x \neq 0$.

Für die Aufgabenteile c), d) beträgt der Wert der Konstante $a = 2$.

c) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ im Bereich $x \in [-4, 4]$.

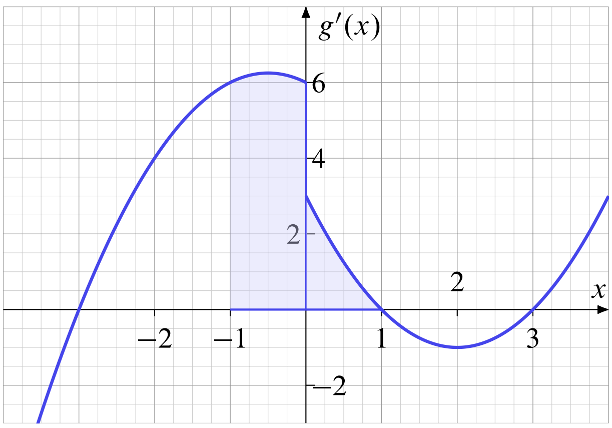
d) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Abszisse im Bereich von $-1 \leqq x \leqq 1$.

Lösungshinweis:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3a = f(0)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3 \Rightarrow a = 1$

b) $f'(x) = \begin{cases} -2x + a - 3 & \text{für } x < 0 \\ 2x - 4 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

c) Skizze des Graphen:



d) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x^2 - x + 6)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_{0}^{1}$$

$$= 6\tfrac{1}{6} + 1\tfrac{1}{3} = 7.5$$

Aufgabe 4 **15 Punkte**

Heidi und Tom wollen heiraten. Für ihr Hochzeitsfest im kleinsten Kreise wollen sie einen Kredit in Höhe von 12 000 000 € aufnehmen und innerhalb von 20 Jahren zu einem Jahreszins von 2 % annuitätisch tilgen.

a) Wie hoch ist die Annuität bei jährlichen Zahlungen?

b) Ermitteln Sie die Restschuld nach 10 Jahren.

c) Geben Sie die 11. Zeile des Tilgungsplans an.

d) Wie lange müssten Heidi und Tom den Kredit zurückzahlen, wenn Sie sich nur eine Annuität von 300 000 € leisten könnten.

Lösungshinweis:

a) $A = \frac{i}{1-q^{-n}} \approx 733\,880.62$ €

b) $R_{10} = A \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} - S \cdot q^{10} \approx 6\,592\,145.03$ €

c) Tilgungsplan:

	Jahr	Rk	Zk	Tk
1	1	12000000.0	240000.00	493880.6
10	10	7182378.1	143647.56	590233.1
11	11	6592145.0	131842.90	602037.7
12	12	5990107.3	119802.15	614078.5
20	20	719490.8	14389.82	719490.8

d) $n = -\log_q\left(1 - \frac{S}{A} \cdot i\right) = -\log_q\left(1 - \frac{12\,000\,000}{300\,000} \cdot 0.02\right) \approx 81.27$, also 82 Jahre lang.

Aufgabe 5 **15 Punkte**

Auf einem Markt konkurrieren zum Zeitpunkt $t = 1$ insgesamt 3 Produkte P_1, P_2 und P_3 mit den jeweiligen Marktanteilen von $x_1^T = (0, 0, 1)$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

charakterisiert die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten, dabei sei $a_{ij} \in [0, 1]$ der Anteil an Käufern von Produkt P_i zum Zeitpunkt t, der zum Zeitpunkt $t + 1$ zu Produkt P_j wechselt.

a) Interpretieren Sie die Koeffizienten a_{12} und a_{33} der Matrix A.

b) Berechnen Sie die Marktanteile der 3 Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2$ und $t = 3$.

Langfristig ergeben sich stabile Marktanteile, wenn sich das Wechselverhalten der Käufer, beschrieben durch die Matrix A, im Zeitablauf nicht ändert, also die Gleichung

$$x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = x_t^T \quad \Leftrightarrow \quad A^T \cdot x = 1 \cdot x$$

erfüllt ist. Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ der Matrix A^T beschreibt also genau diesen stabilen Marktzustand x^T.

c) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung des Eigenvektors zu A^T und $\lambda = 1$ auf.

d) Für den stabilen Marktzustand $x^T = (a, b, c)$ ist bekannt, dass $a = \frac{5}{23}$ (Diesen Wert müssen Sie nicht nachrechnen). Bestimmen Sie b, c.

Hinweis: Benutzen Sie nicht den Gaußalgorithmus, sondern setzen Sie den schon gegebenen Wert in das Gleichungssystem ein.

Lösungshinweis:

a) $a_{12} = 0.3$ bedeutet: 30 % aller aktuellen P_1-Käufer wechseln im nächsten Zeitraum zu P_2
$a_{33} = 0.9$: 90 % der P_3-Käufer bleiben auch im nächsten Zeitpunkt markentreu.

b) $x_2^T = x_1^T \cdot A = (0.1, 0, 0.9)$,
$x_3^T = x_2^T \cdot A = (0.13, 0.03, 0.84)$.

c) $(A - E)^T x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3		Operation
1	1	1	1	1	
2	3	−5	0	0	
3	3	0	−1	0	
4	1	1	1	1	$+1 \cdot$ 1
5	0	−8	−3	−3	2 $- 3 \cdot$ 1
6	0	−3	−4	−3	3 $- 3 \cdot$ 1
7	1	0	$-1/3$	0	4 $+ 1/3 \cdot$ 6
8	0	1	$4/3$	1	5 $- 8/3 \cdot$ 6
9	0	0	$23/3$	5	$-1/3 \cdot$ 6
10	1	0	0	$5/23$	7 $+ 1/23 \cdot$ 9
11	0	1	0	$3/23$	8 $- 4/23 \cdot$ 9
12	0	0	1	$15/23$	$+3/23 \cdot$ 9

Aufgabe 6 **9 Punkte**

Reelle $n \times n$ Matrizen, deren Determinante 1 beträgt, werden auch unimodulare Matrizen genannt.

Gegeben ist eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 2b \\ 0 & -5 & 3b & 0 \\ -3b & -4b & 0 & 3b \end{pmatrix}.$$

Für welche b ist A eine unimodulare Matrix?

Lösungshinweis:

$\det(A) = 3b(b \cdot 3b \cdot 3b + 3b \cdot 3b \cdot 2b) = 81b^4 = 1 \Leftrightarrow b = \pm\frac{1}{3}$