Hochschule Augsburg - Fakultät AW

Professur für
Wirtschaftsmathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Etschberger

Vorname: ....

Nachname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Versuch Nr.: ....

Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

Prüfer	Etschberger, Henle, Wesp
Prüfungsdatum	15. Januar 2020
Prüfungsort	Augsburg
Studiengang	BW, IM
Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Punkte:	90
Die Klausur umfasst	6 Aufgaben auf 18 Seiten
Zugelassene Hilfsmittel	Schreibzeug, Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann, ein mit dem Namen versehenes Din-A4 Blatt mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke)

Weitere Regularien:

- Bitte überprüfen Sie *vor* Bearbeitungsbeginn die Vollständigkeit der Klausurangabe.
- Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein.
- Die Heftung der Klausur darf nicht verändert werden.
- Bitte tragen Sie die Lösung zu den jeweiligen Aufgaben *nur* direkt im Anschluss an die jeweilige Angabe ein. Sollte der Platz dort nicht ausreichen, verwenden Sie die Ersatzblätter am Ende der Klausurangabe.
- Ergebnisse (auch Zwischenergebnisse) müssen mit mind. 4 gültigen Ziffern angegeben werden.
- Der Lösungsweg muss klar dokumentiert werden.
- Die Klausur ist in ordentlich lesbarer Form zu bearbeiten. Schwer lesbare Teile der Klausur werden als ungültig ersatzlos gestrichen.
- Die Klausur unterliegt der für Sie zur Zeit gültigen Prüfungsordnung.
- Bitte verwenden Sie *keine rote Farbe* zur Bearbeitung der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte						
maximal	23	11	17	15	12	12

Aufgabe 1 — 23 Punkte

a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für $x \neq 1$ die Aussage A_n mit

$$A_n\colon \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

für alle $n \in \{1, 2, \ldots\}$ wahr ist.

b) Geben Sie den Wert der Summe $\sum_{k=0}^{15} 0.8^k$ an.

R

c) Geben Sie R-Code an, mit dem für $n \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ jeweils die Summe $\sum_{k=0}^{n} 0.8^k$ in einer Wertetabelle ausgegeben wird.

d) Gegeben sei die Menge $M = \big\{a, b, \{c\}\big\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(i) $\{a\} \in M$
(ii) $\{b\} \subset M$
(iii) $\{a, b\} \subset M$
(iv) $\emptyset \in M$
(v) $\{c\} \in M$

e) Eine Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen (die Menge selbst gilt auch als Teilmenge). Zeigen Sie speziell für $n = 1$ sowie für $n = 2$, dass diese Aussage gilt.

Aufgabe 2 **11 Punkte**

a) Entscheiden Sie, ob die Folgen (a_n), (b_n) mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_n = \frac{5n^3 + {}^6\!/\!_n}{2n^3 + n + 1}, \qquad b_n = \frac{\dfrac{2\sqrt{{}^1\!/\!_n} + 1}{5n^2 + 3}}{n}$$

konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwerte.

b) Überprüfen Sie die Reihe (t_n) mit (a_i) aus Teilaufgabe a), $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert von (t_n).

c) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die rekursiv definierte Folge (c_n) mit

$$c_{n+1} = 0.5 \cdot c_n, \quad c_0 = 8$$

gegeben. Berechnen Sie die Folgenglieder c_1 und c_2 und geben Sie c_n in expliziter Form an.

Aufgabe 3 — 17 Punkte

Betrachtet man den Absatz eines Produktes in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$, so nimmt man mittel- bis langfristig gelegentlich die folgende *logistische Beziehung* an:

$$f(t) = \alpha(1 + \beta e^{-\gamma t})^{-1} \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Dabei ist $f(t) > 0$ der bis zum Zeitpunkt t getätigte kumulierte Absatz. Berechnen Sie in Abhängigkeit von α, β, γ

a) $f(0)$,

b) den kumulierten Absatz für $t \to \infty$,

c) die erste Ableitung $f'(t)$.

In den folgenden Aufgabenteilen gilt

$$\alpha = 100,\ \beta = 9,\ \gamma = 1\,.$$

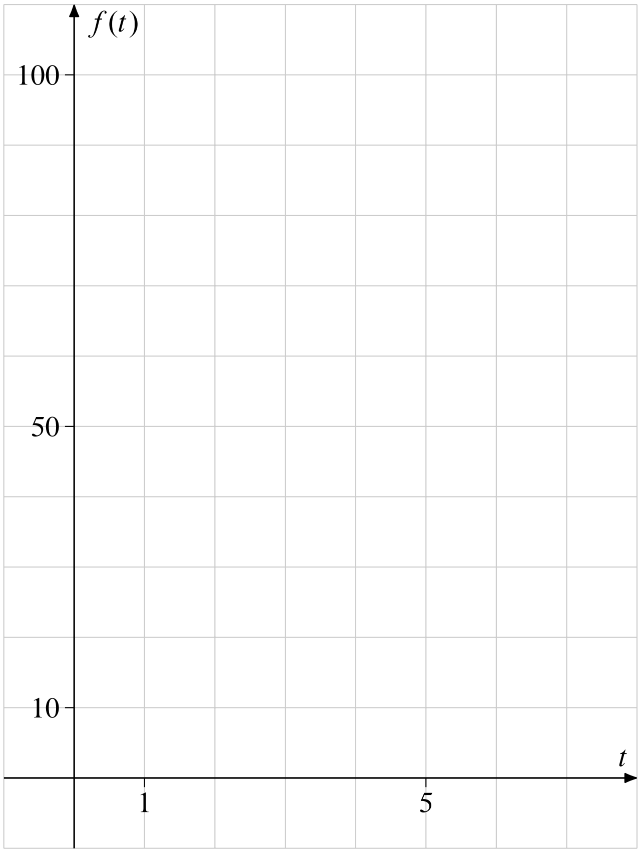
Für die zweite Ableitung von f ergibt sich damit

$$f''(t) = 900 \cdot e^t \cdot \frac{9 - e^t}{(e^t + 9)^3}\,.$$

(Das müssen sie nicht nachrechnen.)

d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und bestimmen Sie alle Wendepunkte von f.

e) Skizzieren Sie den Graph von f in das nebenstehende Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch die Ergebnisse der Teilaufgaben a), b), d) ein.



R f) Geben Sie einen R-Befehl an, mit dem der Funktionsgraph von f für $t \in [0, 8]$ gezeichnet wird.

Aufgabe 4 **15 Punkte**

Vespasian möchte eine mehrjährige Weltreise unternehmen.

Deswegen möchte er jeweils pro Monat vorschüssig einen Betrag in Höhe von 2396.16 € insgesamt 28 Jahre lang auf ein mit 8% p.a. verzinstes Konto einzahlen.

a) Berechnen Sie den nach dieser Zeit angesparten Betrag.

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen können rechnen Sie mit dem (falschen) Betrag 1 430 082.45 € *weiter.*

b) Wieviele Jahre lang kann er direkt im Anschluss an die Ansparphase pro Woche nachschüssig 5802.33 € von diesem Konto entnehmen, bis der Kontostand 0 € beträgt?

   Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Jahr aus genau 52 Wochen besteht.

Aufgabe 5 **12 Punkte**

a) Geben Sie Werte für x, y, z an, so dass die folgende Gleichung stimmt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 6 \\ -17 & -20 \end{pmatrix}.$$

b) Jetzt seien drei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gegeben. Geben Sie, falls möglich, die Anzahl der Zeilen und Spalten von $A \cdot B$ und von $A \cdot C$ an.

c) Gegeben sind die Matrizen D, F mit

$$D = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 10 \\ \bullet & 3 & \bullet \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 17 \\ 12 & \bullet & 1 \\ \bullet & \bullet & -2 \end{pmatrix},$$

von denen einige unbekannte Einträge mit dem Symbol $\bullet$ markiert sind. Können D und F zueinander invers sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben sind nun die beiden Matrizen $G, H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, von denen bekannt ist, dass $G = H^{-1}$ gilt sowie die Vektoren $v, u, w \in \mathbb{R}^2$. Betrachtet werden damit die beiden Gleichungssysteme

$$G \cdot v = u, \quad H \cdot u = 2w.$$

d) Wie lautet w, wenn $v = (1, 4)^T$ gilt?

e) Existiert unter den Gegebenheiten der Aufgabe immer eine eindeutige Lösung für v?

Aufgabe 6 **12 Punkte**

Gegeben ist zu einer Matrix A das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6\,.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Wie viele Zeilen und Spalten hat A?

c) Geben Sie A an, wenn $a_{11} = a_{22} = -0.5,\ a_{12} > 0$ und A symmetrisch ist.

Gegeben ist nun eine (andere) Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. B hat zwei reelle Eigenwerte. Einer davon ist $\lambda_1 = 3$ mit dem Eigenvektor $v_1 = (2,7)^T$.

d) Berechnen Sie $B \cdot v_1$.

e) Ist der Vektor $w = (-2,-7)^T$ auch ein Eigenvektor von B? Begründen Sie Ihre Antwort.