Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 15. Januar 2020 – Prüfer: Etschberger, Henle, Wesp
Studiengang: BW, IM
Punkte: 23, 11, 17, 15, 12, 12 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 23 Punkte

a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für $x \neq 1$ die Aussage A_n mit

$$A_n: \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

für alle $n \in \{1, 2, \ldots\}$ wahr ist.

b) Geben Sie den Wert der Summe $\sum_{k=0}^{15} 0.8^k$ an.

R

c) Geben Sie R-Code an, mit dem für $n \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ jeweils die Summe $\sum_{k=0}^{n} 0.8^k$ in einer Wertetabelle ausgegeben wird.

d) Gegeben sei die Menge $M = \big\{a, b, \{c\}\big\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(i) $\{a\} \in M$
(ii) $\{b\} \subset M$
(iii) $\{a, b\} \subset M$
(iv) $\emptyset \in M$
(v) $\{c\} \in M$

e) Eine Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen (die Menge selbst gilt auch als Teilmenge). Zeigen Sie speziell für $n = 1$ sowie für $n = 2$, dass diese Aussage gilt.

Lösungshinweis:

a) Induktionsanfang $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)\cdot(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}\cdot(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

b) 4.8592625

c)
```r
Summe = function(n) { (1 - 0.8^(n + 1) ) / (1 - 0.8) }
n = 1:15
data.frame(n, Summe(n))
```

d) falsch, wahr, wahr, falsch, wahr

e) $n = 1 : M = \{a\} \quad \to 2^1 = 2$ Teilmengen: $\mathcal{P}(M) = \big\{\emptyset, M\big\}$
$n = 2 : M = \{a,b\} \quad \to 2^2 = 4$ Teilmengen: $\mathcal{P}(M) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\big\}$

Aufgabe 2 **11 Punkte**

a) Entscheiden Sie, ob die Folgen (a_n), (b_n) mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_n = \frac{5n^3 + {}^6\!/\!_n}{2n^3 + n + 1}, \qquad b_n = \frac{\dfrac{2\sqrt{{}^1\!/\!_n} + 1}{5n^2 + 3}}{n}$$

konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwerte.

b) Überprüfen Sie die Reihe (t_n) mit (a_i) aus Teilaufgabe a), $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert von (t_n).

c) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die rekursiv definierte Folge (c_n) mit

$$c_{n+1} = 0.5 \cdot c_n, \quad c_0 = 8$$

gegeben. Berechnen Sie die Folgenglieder c_1 und c_2 und geben Sie c_n in expliziter Form an.

Lösungshinweis:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3(5 + (6/n^4))}{n^3(2 + (1/n^2) + (1/n^3))} = \dfrac{5}{2} = 2.5$

$\Rightarrow (a_n)$ konvergent, Grenzwert $= 2.5$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(2(1/\sqrt{n^3}) + {}^1\!/\!_n)}{n^2(5 + (3/n^2))} = \dfrac{0+0}{5+0} = 0$

$\Rightarrow (b_n)$ konvergent, Grenzwert $= 0$

b) Die Folge (a_n) ist keine Nullfolge, somit ist die Reihe (t_n) divergent.

c) $c_1 = 0.5 \cdot 8$, $c_2 = 0.5^2 \cdot 8$, $c_n = 0.5^n \cdot 8$

Aufgabe 3 **17 Punkte**

Betrachtet man den Absatz eines Produktes in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$, so nimmt man mittel- bis langfristig gelegentlich die folgende *logistische Beziehung* an:

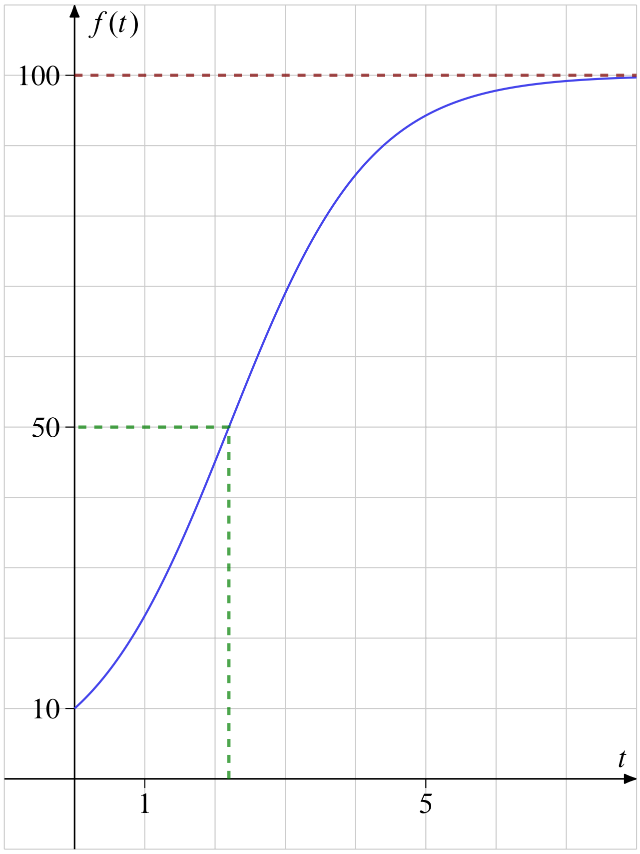
$$f(t) = \alpha(1 + \beta e^{-\gamma t})^{-1} \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Dabei ist $f(t) > 0$ der bis zum Zeitpunkt t getätigte kumulierte Absatz. Berechnen Sie in Abhängigkeit von α, β, γ

a) $f(0)$,

b) den kumulierten Absatz für $t \to \infty$,

c) die erste Ableitung $f'(t)$.



In den folgenden Aufgabenteilen gilt

$$\alpha = 100, \beta = 9, \gamma = 1 .$$

Für die zweite Ableitung von f ergibt sich damit

$$f''(t) = 900 \cdot e^t \cdot \frac{9 - e^t}{(e^t + 9)^3} .$$

(Das müssen sie nicht nachrechnen.)

d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und bestimmen Sie alle Wendepunkte von f.

e) Skizzieren Sie den Graph von f in das nebenstehende Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch die Ergebnisse der Teilaufgaben a), b), d) ein.

R f) Geben Sie einen R-Befehl an, mit dem der Funktionsgraph von f für $t \in [0, 8]$ gezeichnet wird.

Lösungshinweis:

a) $f(0) = \dfrac{a}{1+b}$

b) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \dfrac{a}{1 + b \cdot 0} = a$

c) $f'(t) = abc \cdot \dfrac{e^{-t}}{(1 + be^{-ct})^2}$

d) str. konvex für $x \in \big(0, \ln(9)\big)$,
str. konkav für $x \in \big(\ln(9), \infty\big)$,
Wendepunkt bei $x = \ln(9) \approx 2.20$.

e) siehe Zeichnung

f)
```
curve(100 / (1 + 9 * exp(-x)), from=0, to=8)
```

Aufgabe 4 **15 Punkte**

Vespasian möchte eine mehrjährige Weltreise unternehmen.

Deswegen möchte er jeweils pro Monat vorschüssig einen Betrag in Höhe von 2396.16 € insgesamt 28 Jahre lang auf ein mit 8% p.a. verzinstes Konto einzahlen.

a) Berechnen Sie den nach dieser Zeit angesparten Betrag.

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen können rechnen Sie mit dem (falschen) Betrag 1 430 082.45 € *weiter.*

b) Wieviele Jahre lang kann er direkt im Anschluss an die Ansparphase pro Woche nachschüssig 5802.33 € von diesem Konto entnehmen, bis der Kontostand 0 € beträgt?

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Jahr aus genau 52 Wochen besteht.

Lösungshinweis:

Anzahl.Raten.Ansparphase	336.0
Anzahl.Raten.Entnahmephase	884.0
re.E	313558.2
Rn.A	2860164.9
Rn.A.falsch	1430082.4
Anzahl.Raten.Entnahmephase.falsch	306.7

Aufgabe 5 **12 Punkte**

a) Geben Sie Werte für x, y, z an, so dass die folgende Gleichung stimmt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 6 \\ -17 & -20 \end{pmatrix} .$$

b) Jetzt seien drei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gegeben. Geben Sie, falls möglich, die Anzahl der Zeilen und Spalten von $A \cdot B$ und von $A \cdot C$ an.

c) Gegeben sind die Matrizen D, F mit

$$D = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 10 \\ \bullet & 3 & \bullet \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 17 \\ 12 & \bullet & 1 \\ \bullet & \bullet & -2 \end{pmatrix},$$

von denen einige unbekannte Einträge mit dem Symbol $\bullet$ markiert sind. Können D und F zueinander invers sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben sind nun die beiden Matrizen $G, H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, von denen bekannt ist, dass $G = H^{-1}$ gilt sowie die Vektoren $v, u, w \in \mathbb{R}^2$. Betrachtet werden damit die beiden Gleichungssysteme

$$G \cdot v = u, \quad H \cdot u = 2w .$$

d) Wie lautet w, wenn $v = (1, 4)^T$ gilt?

e) Existiert unter den Gegebenheiten der Aufgabe immer eine eindeutige Lösung für v?

Lösungshinweis:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 6 \\ -17 & -20 \end{pmatrix}$.

b) Es gilt: $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ und $A \cdot C$ ist nicht möglich.

c) Es müsste gelten: $D \cdot F = E_3$, aber es gilt $3 \cdot 17 + 1 \cdot 1 + 10 \cdot (-2) \neq 0$. Damit gilt $D \neq F^{-1}$.

d) Es gilt: $H \cdot (Gv) = 2w \Leftrightarrow H \cdot H^{-1} \cdot v = E \cdot v = v = 2w$ und damit $w = 0.5 \cdot (1, 4)^T = (0.5, 2)^T$.

e) Ja, da $Gv = u$ und G^{-1} existiert, gilt $v = G^{-1} \cdot u = H \cdot u$.

Aufgabe 6 **12 Punkte**

Gegeben ist zu einer Matrix A das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6\,.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Wie viele Zeilen und Spalten hat A?

c) Geben Sie A an, wenn $a_{11} = a_{22} = -0.5$, $a_{12} > 0$ und A symmetrisch ist.

Gegeben ist nun eine (andere) Matrix $B \in \mathbb{R}^2$. B hat zwei reelle Eigenwerte. Einer davon ist $\lambda_1 = 3$ mit dem Eigenvektor $v_1 = (2,7)^T$.

d) Berechnen Sie $B \cdot v_1$.

e) Ist der Vektor $w = (-2,-7)^T$ auch ein Eigenvektor von B? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungshinweis:

a) $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - (-3))$

b) Nullstellen von $\chi(\lambda)$ sind -3 und 2 und damit die gesuchten EW.

c) Der Grad des Polynoms gibt die Anzahl der Zeilen und Spalten an. Also zwei.

d) $\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -1/2 - \lambda & x \\ x & -1/2 - \lambda \end{pmatrix} = (-1/2 - \lambda)^2 - x^2.$
Setze eine Nullstelle (siehe a)) ein, z.B. $\lambda = 2$:
$\chi_A(\lambda) = (2.5)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2.5.$

e) Es gilt: $B \cdot v = \lambda v = 3 \cdot (2,7)^T = (6,21)^T$.

f) Es gilt $w = (-1) \cdot v$, damit ist w ebenfalls ein EV zu B.