Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 6. Juli 2020 – Prüfer: Etschberger, Henle
Studiengang: BW/IM
Punkte: 12, 8, 12, 16, 12, 14, 16 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 **12 Punkte**

a) Es soll die Transitivität der Implikation bewiesen werden. Zeigen Sie dazu, dass zu den Aussagen A, B, C die zusammengesetzte Aussage

$$\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

eine Tautologie ist, in dem Sie in die fehlenden Felder der folgenden Wahrheitstabelle die Wahrheitswerte w (wahr) beziehungsweise f (falsch) eintragen:

A	w	f	w	f	w	f	w	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	w	w	w	f	f	f	f
$D: A \Rightarrow B$	w	w	f	w	w	w	f	w
$E: B \Rightarrow C$	w	w	w	w	f	f	w	w
$F: D \wedge E$	w	w	f	w	f	f	f	w
$G: A \Rightarrow C$	w	w	w	w	f	w	f	w
$H: F \Rightarrow G$	w	w	w	w	w	w	w	w

b) Dr. Jones betritt ein südamerikanisches Grabmal, in dem drei Truhen stehen. Er weiß, dass sich in einer der drei Truhen ein Goldschatz befindet, in den anderen beiden ist tödliches Gas. Jede Truhe hat eine Inschrift:

Truhe	Inschrift
A	„In dieser Truhe ist kein Gold.“
B	„In dieser Truhe ist kein Gold.“
C	„In Truhe B ist Gold.“

Nur genau eine der Inschriften ist wahr. Welche Truhe sollte Dr. Jones öffnen, um an das Gold zu gelangen, ohne sich zu vergiften? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Zählt man in jedem Szenario die wahren Aussagen, erhält man

Wäre das Gold in Truhe	Inschrift auf A	B	C	Anzahl wahr
A	f	w	f	1
B	w	f	w	2
C	w	w	f	2

Also: Das Gold ist in Truhe A

Aufgabe 2 **8 Punkte**

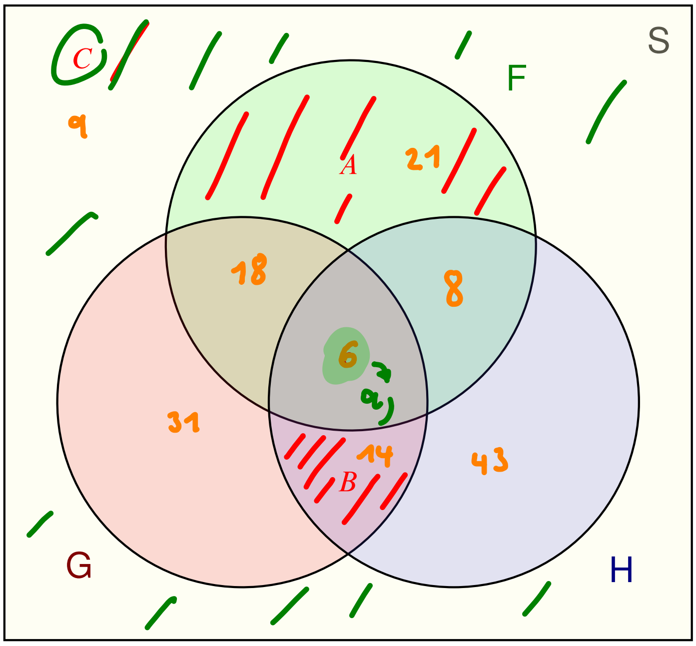
150 Personen werden nach ihren Lieblingssportarten befragt, wobei nur Fußball, Golf und Handball erfasst wird. Es ergibt sich das Umfrageergebnis in Tabelle 1.

Im Folgenden bezeichnet F, G, H jeweils die Menge der Fußball-, Golf- beziehungsweise Handballliebhaber sowie S die Menge aller an der Umfrage teilgenommenen Personen.

Tabelle 1

Anzahl Personen	spielen regelmäßig (mindestens)
69	Golf
53	Fußball
71	Handball
24	Golf und Fußball
20	Golf und Handball
14	Fußball und Handball
6	alle drei Sportarten

a) Tragen Sie die Anzahl der Personen, die alle drei Sportarten angegeben haben in die passende Fläche im nebenstehendem Venn-Diagramm ein.



b) Gegeben sind die drei Mengen A, B, C mit

- $A = F \setminus (G \cup H)$,
- $B = (H \cap G) \setminus F$,
- $C = S \setminus (F \cup G \cup H)$.

Markieren Sie diese drei Mengen (mit unterscheidbaren Farben oder Schraffuren) im Venndiagramm und schreiben Sie den jeweiligen Buchstaben (A, B, C) dazu.

c) Tragen Sie die Mächtigkeit (Anzahl der Elemente) der drei Mengen in folgende Felder ein:

- $|A| =$ 21
- $|B| =$ 14
- $|C| =$ 9

Lösungshinweis:

s.o.

Aufgabe 3 **12 Punkte**

Nachdem Harry von seiner Oma nicht mehr unterstützt wird, springt seine Frau Meghan ein. Die beiden vereinbaren, dass sie ihm eine gewisse Zeit finanziell unter die Arme greift, bis er einen adäquaten Arbeitsplatz gefunden hat. Sie möchte jedoch, dass Harry zügig etwas findet und setzt folgende Konditionen fest:

Meghan bezahlt ihm einen Fixbetrag von 1000 € pro Monat und im 1. Monat zusätzlich 9000 €. Dieser Zusatzbetrag fällt jeden weiteren Monat um 5 % des Zusatzbetrages aus dem Vormonat.

a) Tragen Sie in folgende Tabelle für die fehlenden Monate Meghans Zahlungen an Harry ein.

Monat 2:
$1000 + 9000 \cdot 0.95$
Monat 3:
$1000 + 9000 \cdot 0.95^2$
Monat n: $1000 + 9000 \cdot 0.95^{n-1}$ (a_n)

Monat	1	2	3	4
Zahlung	10 000.00	9550.00	9122.50	8716.38

b) Welchen Betrag erhält Harry im letzten Monat des 2. Jahrs?

c) Stellen Sie die Folge (a_n) der gesamten Zahlung, die Meghan pro Monat an Harry leistet als Formel in Abhängigkeit von n auf.

d) Harry weiß, dass er mindestens 3000 €/Monat zum Leben braucht. Wie lange kann sich Harry somit finanzieren, wenn er kein Geld anspart und ausgeschlossen wird, dass Harry zu einer neuen, finanzstarken Frau wechselt bzw. eine andere Geldquelle für sich auftut?

e) Harry lebt heimlich sehr sparsam von 1000 € pro Monat. Den Rest der Zuwendungen von Meghan spart er (ohne Zinsen). Wieviel hat er insgesamt in den ersten drei Jahren angespart?

Lösungshinweis:

a) s.o.

b) $a_n = 1000 + 9000 \cdot 0.95^{n-1}$

c) im 24. Monat: $a_{24} \approx 3766.21$

d) $a_n = 1000 + 9000 \cdot 0.95^{n-1} \geqq 3000 \Leftrightarrow 0.95^{n-1} \geqq 2/9 \Leftrightarrow n \leqq \log_{0.95}(2/9) + 1 \approx 30.3.$
Also: Im 30. Monat (2. Jahr, 6. Monat) reicht's gerade noch, ab dem 31. Monat ist es weniger als 3000 €.

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{36}(a_i - 1000) = \sum_{i=1}^{36} 9000 \cdot 0.95^{i-1} = \sum_{i=0}^{35} 9000 \cdot 0.95^{i} = 9000 \cdot \frac{0.95^{36} - 1}{0.95 - 1} \approx 151\,599.74$

Aufgabe 4 **16 Punkte**

Marianne und Michael Meyer legen am 16.05.1997, dem Tag der Geburt ihrer Tochter Lena, 5000 Euro zu einem Zinssatz von 3% auf ein Sparbuch.

a) Berechnen Sie mit der Methode der gemischten Verzinsung, wie viel Geld Lena am 20.07.2019, dem Tag ihrer Hochzeit, zur Verfügung hat. Gehen Sie dabei davon aus, dass in der Zwischenzeit weder etwas auf das Sparbuch eingezahlt, noch etwas davon abgehoben wurde.

b) Nach der Hochzeitsreise ist Lenas Sparbuch leider leer. Daher nimmt sie sich vor, ab dem 01.01.2020 immer zum Monatsanfang 100 Euro auf ein Konto mit 3% einzuzahlen. Außer diesen Sparraten und den Zinszahlungen gibt es keine Kontobewegungen. An welchem Datum (taggenaue Angabe) hat sie zum ersten mal mehr als 6000 € angespart?

Hinweis: Beachten Sie, dass die Zinsen nur jeweils am Ende des Jahres ausgeschüttet werden.

Lösungshinweis:

a) Zinstage in 1997: $\Delta t_1 = 7 \cdot 30 + 15 = 225$
Zinstage in 2019: $\Delta t_2 = 6 \cdot 30 + 19 = 199$
Ganze Jahre dazwischen: $n = 21$

Damit:
$$K_t = 5000 \cdot \left(1 + 0.03 \cdot \frac{225}{360}\right) \cdot 1.03^{21} \cdot \left(1 + 0.03 \cdot \frac{199}{360}\right) \approx 9633.02$$

b) Rentenersatzrate (vorschüssig): $r_e = 100 \cdot \left(12 + 0.03 \cdot \frac{13}{2}\right) = 1219.50$

Rentenendwert (nachschüssig):

$6000 = 1219.50 \cdot (1.03^n - 1)/0.03 \Leftrightarrow n = \log_{1.03}\left(\frac{6000}{1219.50} \cdot 0.03 + 1\right) \approx 4.66.$

Nach 4 Jahren hat Sie inkl. Zinsen $1219.5 \cdot (1.03^4 - 1)/0.03 \approx 5101.93$ angespart. Innerhalb des Jahres gibt es keine Zinsausschüttungen, am 1.9.2024 hat Sie $5101.93 + 9 \cdot 100 = 6001.93$ (reicht gerade).

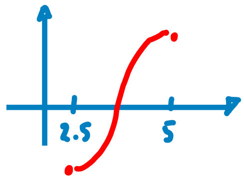
Aufgabe 5 **12 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{2} - 2x - \ln(x-2)\,.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ von f an.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[2.5, 5]$ eine Nullstelle besitzt. (*Hinweis*: Die Nullstelle muss nicht angegeben werden)



c) Für welche $x \in [2.5, 10]$ wird f minimal?

d) Für welche $x \in [2.5, 10]$ wird die *Steigung* von f minimal?

e) Berechnen Sie den Grenzwert von $f''(x)$ für $x \to \infty$.

Lösungshinweis:

a) $D = (2; \infty)$

b) $f(2.5) \approx -1.18 < 0$ und $f(\cancel{10}\ 5) \approx \cancel{27.92}\ 21.40 > 0$. Da f stetig gilt der Zwischenwertsatz. Damit existiert eine Nullstelle im geg. Intervall.

c) $f'(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} (1) \\ 3 \end{cases}$.

$$\frac{(x-2)^2-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2-1=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4-1=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16-12}\right) = 2 \pm 1 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$f''(x) = 1 + (x-2)^{-2} > 0$. Also hat f bei $x = 3$ ein globales Minimum im Intervall.

d) Die Steigung der Steigung wird durch f'' charakterisiert. f'' ist im ganzen Intervall positiv (die Steigung ist str. mon. steigend), damit muss das Minimum am linken Rand des Intervalls liegen (Intervall ist abgeschlossen), also bei $x = 2.5$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 1 + 0 = 1$

Aufgabe 6 — 14 Punkte

Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
G_1: & 9x_1 & + & & & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 40 \\
G_2: & 2x_1 & + & 3x_2 & + & & & 4x_4 & + & & = & 70 \\
G_3: & 4x_1 & + & & & 2x_3 & + & & & 3x_5 & = & 10 \\
G_4: & -2x_1 & + & & & -2x_3 & + & 8x_4 & + & -5x_5 & = & 30 \\
G_5: & x_1 & + & 3x_2 & + & & & & & x_5 & = & 50
\end{array}
$$

a) Nutzen Sie den Algorithmus von Gauß und Jordan zur Lösung linearer Gleichungssysteme, um das folgende Tableau zu vervollständigen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Operation
①	9	0	4	4	5	40	
②	2	3	0	4	0	70	
③	4	0	2	0	3	10	
④	−2	0	−2	8	−5	30	
⑤	1	3	0	0	1	50	
⑥	1	3	0	0	1	50	$+1 \cdot$ ⑤
⑦	$\boxed{0}$	$\boxed{-27}$	4	4	−4	−410	① $- 9 \cdot$ ⑤
⑧	$\boxed{0}$	$\boxed{-3}$	0	4	$\boxed{-2}$	$\boxed{-30}$	② $- 2 \cdot$ ⑤
⑨	$\boxed{0}$	$\boxed{-12}$	2	0	−1	−190	③ $- 4 \cdot$ ⑤
⑩	0	6	−2	8	−3	130	④ $+ 2 \cdot$ ⑤
⑪	$\boxed{1}$	0	0	4	−1	20	$\boxed{⑥ + 1 \cdot ⑧}$
⑫	$\boxed{0}$	1	0	$-4/3$	$2/3$	10	$-1/3 \cdot$ ⑧
⑬	0	$\boxed{0}$	4	$\boxed{-32}$	14	−140	⑦ $- 9 \cdot$ ⑧
⑭	$\boxed{0}$	0	2	−16	7	−70	⑨ $- 4 \cdot$ ⑧
⑮	0	0	$\boxed{-2}$	16	−7	$\boxed{70}$	⑩ $+ 2 \cdot$ ⑧
⑯	1	0	0	$\boxed{4}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{20}$	$\boxed{⑪ + 0 \cdot ⑬}$
⑰	0	1	0	$-4/3$	$2/3$	$\boxed{10}$	⑫ $+ 0 \cdot$ ⑬
⑱	0	0	1	−8	$7/2$	−35	$+1/4 \cdot$ ⑬
⑲	0	0	$\boxed{0}$	0	0	0	⑭ $- 1/2 \cdot$ ⑬
⑳	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	⑮ $+ 1/2 \cdot$ ⑬

b) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an.

c) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an, wenn $x_4 = 6$ und $x_5 = 0$ beträgt.

Lösungshinweis:

b) Es gibt unendlich viele Lösungen:

$$x_1 = 20 - 4x_4 + x_5, \quad x_2 = 10 + {}^4\!/\!{}_3 x_4 - {}^2\!/\!{}_3 x_5, \quad x_3 = -35 + + 8x_4 - {}^7\!/\!{}_2 x_5, \quad x_4, x_5 \text{ beliebig wählbar}$$

c) $x_1 = -4, x_2 = 18, x_3 = 13, x_4 = 6, x_5 = 0$

Aufgabe 7 **16 Punkte**

Gegeben ist die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert von A ist.

b) Berechnen Sie die beiden anderen Eigenwerte λ_2, λ_3 von A.

c) Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörender Eigenvektor ist.

d) Geben Sie einen weiteren Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ an.

e) Welcher der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist ein Eigenvektor von A? Bestimmen Sie ggf. den jeweils zugehörigen Eigenwert.

Lösungshinweis:

a) $\det(A - 1 \cdot E) = -1 + 2 - 1 = 0$

b) $\chi_A(\lambda) = \lambda \cdot (-\lambda^2 + 4\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$

c) $Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot v = \lambda \cdot v$

d) zum Beipiel: $2 \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) $Av_1 = (204)^T$ (kein EV),
$Av_2 = 3v2$ (EV zu $\lambda = 3$),
$Av_3 = 0v_3, Av_4 = 0v_4$ (jeweils EV zu $\lambda = 0$)