Hochschule Augsburg - Fakultät AW
Professur für Wirtschaftsmathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Etschberger

Vorname: ....

Nachname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Versuch Nr.: ....

Klausur Ingenieurmathematik 2

Prüfer	Etschberger, Zerbe
Prüfungsdatum	8. Juni 2019
Prüfungsort	Augsburg
Studiengang	Bbgl. W-Ing
Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Punkte:	90
Die Klausur umfasst	7 Aufgaben auf 19 Seiten
Zugelassene Hilfsmittel	Zwei DIN-A4 Blätter mit Notizen (handschriftlich vom Prüfling verfasst und mit Namen versehen), Taschenrechner (der nicht 70! berechnen kann)

Weitere Regularien:

- Bitte überprüfen Sie *vor* Bearbeitungsbeginn die Vollständigkeit der Klausurangabe.
- Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein.
- Die Heftung der Klausur darf nicht verändert werden.
- Bitte tragen Sie die Lösung zu den jeweiligen Aufgaben *nur* direkt im Anschluss an die jeweilige Angabe ein. Sollte der Platz dort nicht ausreichen, verwenden Sie die Ersatzblätter am Ende der Klausurangabe.
- Ergebnisse (auch Zwischenergebnisse) müssen mit mind. 4 gültigen Ziffern angegeben werden.
- Der Lösungsweg muss klar dokumentiert werden.
- Die Klausur ist in ordentlich lesbarer Form zu bearbeiten. Schwer lesbare Teile der Klausur werden als ungültig ersatzlos gestrichen.
- Die Klausur unterliegt der für Sie zur Zeit gültigen Prüfungsordnung.
- Bitte verwenden Sie *keine rote Farbe* zur Bearbeitung der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte							
maximal	8	19	18	13	12	12	8

Aufgabe 1 **8 Punkte**

a) Berechnen Sie $\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x$.

b) Berechnen Sie mit partieller Integration $\int 6x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 **19 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 4x\sqrt{y}\,.$$

a) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f am Punkt (3;1) in Richtung Nordwest.

Gegeben ist jetzt die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y) = x^3 - 12x - 9y + 1.5y^2\,.$$

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, an denen der Gradient von g verschwindet, also die möglichen Kandidaten für Extremwerte.

d) Geben Sie die Hesse-Matrix H_g von g an.

e) Berechnen Sie die Hesse-Matrizen an den bei c) berechneten Punkten.

f) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen und bestimmen Sie anhand dieser Eigenwerte, ob und um welche Extremwerte es sich handelt.

Aufgabe 3 **18 Punkte**

a) Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2y' + 10y = 0\,.$$

b) Geben Sie eine Lösung von a) an, die durch den Punkt (0;4) geht.
Falls Sie a) nicht lösen konnten, bestimmen Sie die gesuchte Lösung für die Funktion $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

c) Wie lautet die homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die die charakteristische Gleichung $\lambda^3 - 4\lambda + 2 = 0$ besitzt?

d) Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

beschreibt die Änderung der Temperatur T aufgrund von Wärmeleitung. Überprüfen Sie, ob

$$T(x,t) = 2\cos(x)\,\mathrm{e}^{4t} + 10$$

eine Lösung der Differentialgleichung darstellt.

Aufgabe 4 **13 Punkte**

Auf einem Markt konkurrieren zum Zeitpunkt $t = 1$ insgesamt 3 Produkte P_1, P_2 und P_3 mit den jeweiligen Marktanteilen von $x_1^T = (0, 0, 1)$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

charakterisiert die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten, dabei sei $a_{ij} \in [0, 1]$ der Anteil an Käufern von Produkt P_i zum Zeitpunkt t, der zum Zeitpunkt $t + 1$ zu Produkt P_j wechselt.

a) Interpretieren Sie die Koeffizienten a_{12} und a_{33} der Matrix A.

b) Berechnen Sie die Marktanteile der 3 Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2$ und $t = 3$.

Langfristig ergeben sich stabile Marktanteile, wenn sich das Wechselverhalten der Käufer, beschrieben durch die Matrix A, im Zeitablauf nicht ändert, also die Gleichung

$$x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = x_t^T \quad \Leftrightarrow \quad A^T \cdot x = 1 \cdot x$$

erfüllt ist. Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ der Matrix A^T beschreibt also genau diesen stabilen Marktzustand x^T.

c) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung des Eigenvektors zu A^T und $\lambda = 1$ auf.

d) Für den stabilen Marktzustand $x^T = (a, b, c)$ ist bekannt, dass $a = \frac{5}{23}$ (Diesen Wert müssen Sie nicht nachrechnen). Bestimmen Sie b, c.

Hinweis: Benutzen Sie nicht den Gaußalgorithmus, sondern setzen Sie den schon gegebenen Wert in das Gleichungssystem ein.

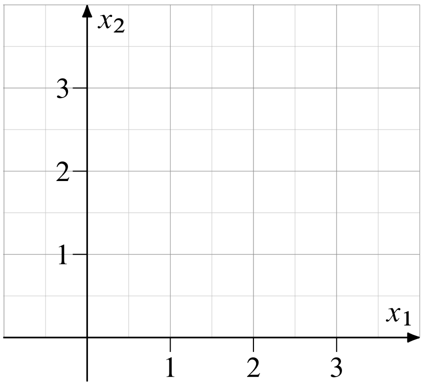
Aufgabe 5 — 12 Punkte

Gegeben sind die vier Mengen

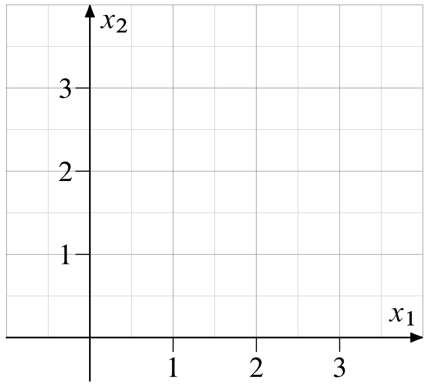
$$M_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; -2x_1 + x_2 \geqq 1 \;\text{ und }\; 2x_1 - x_2 \geqq -2\right\} ,$$
$$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; 1 \leqq (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leqq \tfrac{9}{4}\right\} ,$$
$$M_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; x_1 \in [1, 3], x_2 \in (1, 3)\right\} ,$$
$$M_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 - \lambda) \text{ mit } \lambda \in [0, 1]\right\} .$$

a) Zeichnen Sie die Mengen $M_1, \ldots, M_4$ jeweils in das zugehörige Koordinatensystem ein.

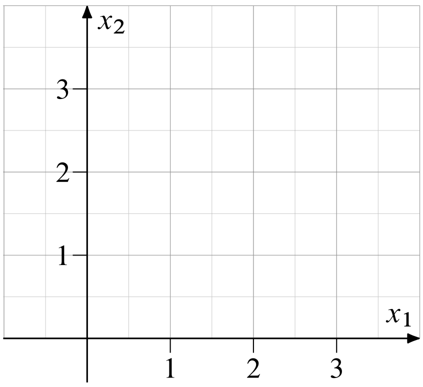
M_1



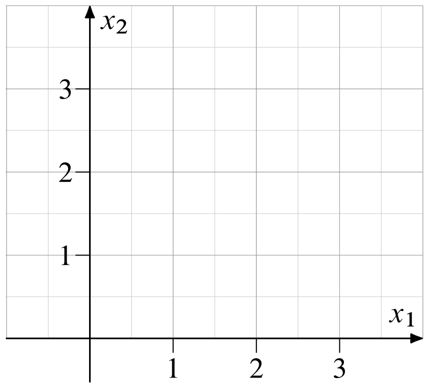
M_2



M_3



M_4



b) Kreuzen Sie in nebenstehender Tabelle jeweils genau die Eigenschaften an, die für die jeweilige Menge zutreffen.

Menge	M_1	M_2	M_3	M_4
offen				
abgeschlossen				
beschränkt				
konvex				
leer				

Aufgabe 6 **12 Punkte**

Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
G_1: & 5x_1 & + & & & & & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 30 \\
G_2: & 5x_1 & + & 5x_2 & + & & & & & 3x_5 & = & 10 \\
G_3: & 5x_1 & + & 10x_2 & + & 4x_3 & + & -6x_4 & + & & = & -20 \\
G_4: & 5x_1 & + & & & 4x_3 & + & & & 4x_5 & = & 20 \\
G_5: & -5x_1 & + & -5x_2 & + & 8x_3 & + & -6x_4 & + & -5x_5 & = & -30
\end{array}
$$

a) Nutzen Sie den Algorithmus von Gauß und Jordan zur Lösung linearer Gleichungssysteme, um das folgende Tableau zu vervollständigen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Operation
1	5	0	0	3	5	30	
2	5	5	0	0	3	10	
3	5	10	4	-6	0	-20	
4	5	0	4	0	4	20	
5	-5	-5	8	-6	-5	-30	
6	1	0	0	$3/5$	1	6	$+1/5 \cdot$ 1
7			0	-3	-2	-20	2 $- 1 \cdot$ 1
8		10	4	-9			3 $- 1 \cdot$ 1
9	0		4	-3	-1	-10	4 $- 1 \cdot$ 1
10	0	-5	8	-3	0	0	5 $+ 1 \cdot$ 1
11		0	0	$3/5$	1	6	
12		1	0	$-3/5$	$-2/5$	-4	$+1/5 \cdot$ 7
13	0		4		-1		8 $- 2 \cdot$ 7
14		0	4	-3	-1	-10	9 $+ 0 \cdot$ 7
15	0	0		-6	-2		10 $+ 1 \cdot$ 7
16	1	0	0	$3/5$		6	
17	0	1	0	$-3/5$	$-2/5$		12 $+ 0 \cdot$ 13
18	0	0	1	$-3/4$	$-1/4$	$-5/2$	$+1/4 \cdot$ 13
19	0	0	0		0	0	14 $- 1 \cdot$ 13
20	0	0	0	0	0		15 $- 2 \cdot$ 13

b) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an.

c) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an, wenn $x_4 = 0$ und $x_3 = 10$ beträgt.

Aufgabe 7 **8 Punkte**

Reelle $n \times n$ Matrizen, deren Determinante 1 beträgt, werden auch unimodulare Matrizen genannt.

Gegeben ist eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 2b \\ 0 & -5 & 3b & 0 \\ -3b & -4b & 0 & 3b \end{pmatrix}.$$

Für welche b ist A eine unimodulare Matrix?