Klausur Ingenieurmathematik 2
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 8. Juni 2019 – Prüfer: Etschberger, Zerbe
Studiengang: Bbgl. W-Ing
Punkte: 8, 19, 18, 13, 12, 12, 8 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 8 Punkte

a) Berechnen Sie $\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x$.

b) Berechnen Sie mit partieller Integration $\int 6x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Lösungshinweis:

tbd

Aufgabe 2 — 19 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 4x\sqrt{y}\,.$$

a) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f am Punkt (3;1) in Richtung Nordwest.

Gegeben ist jetzt die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y) = x^3 - 12x - 9y + 1.5y^2\,.$$

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, an denen der Gradient von g verschwindet, also die möglichen Kandidaten für Extremwerte.

d) Geben Sie die Hesse-Matrix H_g von g an.

e) Berechnen Sie die Hesse-Matrizen an den bei c) berechneten Punkten.

f) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen und bestimmen Sie anhand dieser Eigenwerte, ob und um welche Extremwerte es sich handelt.

Aufgabe 3 — 18 Punkte

a) Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2y' + 10y = 0\,.$$

b) Geben Sie eine Lösung von a) an, die durch den Punkt (0;4) geht.
Falls Sie a) nicht lösen konnten, bestimmen Sie die gesuchte Lösung für die Funktion $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

c) Wie lautet die homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die die charakteristische Gleichung $\lambda^3 - 4\lambda + 2 = 0$ besitzt?

d) Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

beschreibt die Änderung der Temperatur T aufgrund von Wärmeleitung. Überprüfen Sie, ob

$$T(x, t) = 2\cos(x)\,\mathrm{e}^{4t} + 10$$

eine Lösung der Differentialgleichung darstellt.

Lösungshinweis:

Aufgabe 4 **13 Punkte**

Auf einem Markt konkurrieren zum Zeitpunkt $t = 1$ insgesamt 3 Produkte P_1, P_2 und P_3 mit den jeweiligen Marktanteilen von $x_1^T = (0, 0, 1)$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

charakterisiert die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten, dabei sei $a_{ij} \in [0, 1]$ der Anteil an Käufern von Produkt P_i zum Zeitpunkt t, der zum Zeitpunkt $t + 1$ zu Produkt P_j wechselt.

a) Interpretieren Sie die Koeffizienten a_{12} und a_{33} der Matrix A.

b) Berechnen Sie die Marktanteile der 3 Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2$ und $t = 3$.

Langfristig ergeben sich stabile Marktanteile, wenn sich das Wechselverhalten der Käufer, beschrieben durch die Matrix A, im Zeitablauf nicht ändert, also die Gleichung

$$x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = x_t^T \quad \Leftrightarrow \quad A^T \cdot x = 1 \cdot x$$

erfüllt ist. Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ der Matrix A^T beschreibt also genau diesen stabilen Marktzustand x^T.

c) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung des Eigenvektors zu A^T und $\lambda = 1$ auf.

d) Für den stabilen Marktzustand $x^T = (a, b, c)$ ist bekannt, dass $a = \frac{5}{23}$ (Diesen Wert müssen Sie nicht nachrechnen). Bestimmen Sie b, c.

Hinweis: Benutzen Sie nicht den Gaußalgorithmus, sondern setzen Sie den schon gegebenen Wert in das Gleichungssystem ein.

Lösungshinweis:

a) $a_{12} = 0.3$ bedeutet: 30 % aller aktuellen P_1-Käufer wechseln im nächsten Zeitraum zu P_2
$a_{33} = 0.9$: 90 % der P_3-Käufer bleiben auch im nächsten Zeitpunkt markentreu.

b) $x_2^T = x_1^T \cdot A = (0.1, 0, 0.9)$,
$x_3^T = x_2^T \cdot A = (0.13, 0.03, 0.84)$.

c) $(A - E)^T x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

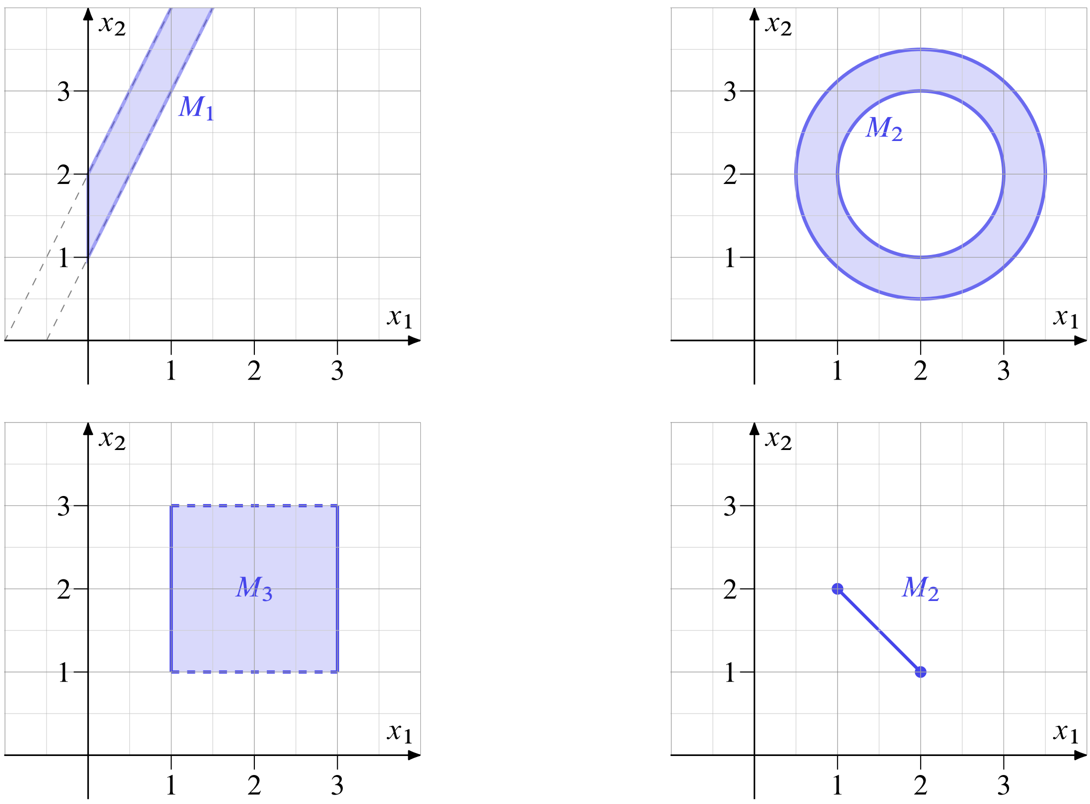
	x_1	x_2	x_3		Operation
①	1	1	1	1	
②	3	−5	0	0	
③	3	0	−1	0	
④	1	1	1	1	$+1 \cdot$ ①
⑤	0	−8	−3	−3	② $- 3 \cdot$ ①
⑥	0	−3	−4	−3	③ $- 3 \cdot$ ①
⑦	1	0	$-1/3$	0	④ $+ 1/3 \cdot$ ⑥
⑧	0	1	$4/3$	1	⑤ $- 8/3 \cdot$ ⑥
⑨	0	0	$23/3$	5	$-1/3 \cdot$ ⑥
⑩	1	0	0	$5/23$	⑦ $+ 1/23 \cdot$ ⑨
⑪	0	1	0	$3/23$	⑧ $- 4/23 \cdot$ ⑨
⑫	0	0	1	$15/23$	$+3/23 \cdot$ ⑨

Aufgabe 5 **12 Punkte**

Gegeben sind die vier Mengen

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ -2x_1 + x_2 \geqq 1 \ \text{ und } \ 2x_1 - x_2 \geqq -2\right\} , \\
M_2 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ 1 \leqq (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leqq \tfrac{9}{4}\right\} , \\
M_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ x_1 \in [1, 3], x_2 \in (1, 3)\right\} , \\
M_4 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ x = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot (1 - \lambda) \text{ mit } \lambda \in [0, 1]\right\} .
\end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie die Mengen $M_1, \ldots, M_4$ jeweils in das zugehörige Koordinatensystem ein.



b) Kreuzen Sie in nebenstehender Tabelle jeweils genau die Eigenschaften an, die für die jeweilige Menge zutreffen.

Menge	M_1	M_2	M_3	M_4
offen				
abgeschlossen	X	X		X
beschränkt		X	X	X
konvex	X		X	X
leer				

Aufgabe 6 **12 Punkte**

Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem:

$G_1:$	$5x_1$	$+$					$3x_4$	$+$	$5x_5$	$=$	30
$G_2:$	$5x_1$	$+$	$5x_2$	$+$					$3x_5$	$=$	10
$G_3:$	$5x_1$	$+$	$10x_2$	$+$	$4x_3$	$+$	$-6x_4$	$+$		$=$	-20
$G_4:$	$5x_1$	$+$			$4x_3$	$+$			$4x_5$	$=$	20
$G_5:$	$-5x_1$	$+$	$-5x_2$	$+$	$8x_3$	$+$	$-6x_4$	$+$	$-5x_5$	$=$	-30

a) Nutzen Sie den Algorithmus von Gauß und Jordan zur Lösung linearer Gleichungssysteme, um das folgende Tableau zu vervollständigen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Operation
1	5	0	0	3	5	30	
2	5	5	0	0	3	10	
3	5	10	4	-6	0	-20	
4	5	0	4	0	4	20	
5	-5	-5	8	-6	-5	-30	
6	1	0	0	$3/5$	1	6	$+1/5 \cdot 1$
7	$\boxed{0}$	$\boxed{5}$	0	-3	-2	-20	$2 - 1 \cdot 1$
8	$\boxed{0}$	10	4	-9	$\boxed{-5}$	$\boxed{-50}$	$3 - 1 \cdot 1$
9	0	$\boxed{0}$	4	-3	-1	-10	$4 - 1 \cdot 1$
10	0	-5	8	-3	0	0	$5 + 1 \cdot 1$
11	$\boxed{1}$	0	0	$3/5$	1	6	$\boxed{6 + 0 \cdot 7}$
12	$\boxed{0}$	1	0	$-3/5$	$-2/5$	-4	$+1/5 \cdot 7$
13	0	$\boxed{0}$	4	$\boxed{-3}$	-1	$\boxed{-10}$	$8 - 2 \cdot 7$
14	$\boxed{0}$	0	4	-3	-1	-10	$9 + 0 \cdot 7$
15	0	0	$\boxed{8}$	-6	-2	$\boxed{-20}$	$10 + 1 \cdot 7$
16	1	0	0	$3/5$	$\boxed{1}$	6	$\boxed{11 + 0 \cdot 13}$
17	0	1	0	$-3/5$	$-2/5$	$\boxed{-4}$	$12 + 0 \cdot 13$
18	0	0	1	$-3/4$	$-1/4$	$-5/2$	$+1/4 \cdot 13$
19	0	0	0	$\boxed{0}$	0	0	$14 - 1 \cdot 13$
20	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	$15 - 2 \cdot 13$

b) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an.

c) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an, wenn $x_4 = 0$ und $x_3 = 10$ beträgt.

Lösungshinweis:

Aufgabe 7

8 Punkte

Reelle $n \times n$ Matrizen, deren Determinante 1 beträgt, werden auch unimodulare Matrizen genannt.

Gegeben ist eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 2b \\ 0 & -5 & 3b & 0 \\ -3b & -4b & 0 & 3b \end{pmatrix}.$$

Für welche b ist A eine unimodulare Matrix?

Lösungshinweis:

$\det(A) = 3b(b \cdot 3b \cdot 3b + 3b \cdot 3b \cdot 2b) = 81b^4 = 1 \Leftrightarrow b = \pm\frac{1}{3}$