Klausur Ingenieurmathematik 2
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 28. September 2019 – Prüfer: Etschberger, Zerbe
Studiengang: Bbgl. W-Ing
Punkte: 10, 19, 16, 12, 11, 12, 10 ;   Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 **10 Punkte**

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int \left(4x^3 + x - \frac{4}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

b) Berechnen Sie mit partieller Integration $\displaystyle\int_0^{\pi} 2x\,\sin(0{,}5\,x)\,\mathrm{d}x$.

Lösungshinweis:

Aufgabe 2 **19 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 12x - 12y\,.$$

a) Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion am Punkt (3; 1) in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie die möglichen Kandidaten für Extremwerte.

d) Geben Sie die Hesse-Matrix H_f von f an.

e) Berechnen Sie für die beiden Punkte $(-2; -1)$ und $(-2; 2)$ jeweils die Eigenwerte der zugehörigen Hesse-Matrix H_f und bestimmen Sie anhand dieser Eigenwerte jeweils, ob und um welche Art von Extremwert es sich handelt.

Lösungshinweis:

Aufgabe 3 **16 Punkte**

a) Lösen Sie mit dem Verfahren *Trennung der Variablen* die folgende Differentialgleichung

$$2y'\sqrt{x} = y\,.$$

b) Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 9\,y = 0\,.$$

Geben Sie die Lösung an, die für $x = 0$ den Wert 2 hat und deren erste Ableitung dort den Wert 0 annimmt.

c) Sind die Funktionen f_1, f_2 mit

$$f_1(x,t) = x^2 - 6xt + 9t^2\,,$$
$$f_2(x,t) = x + 2xt + t$$

Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$2\,\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0\ ?$$

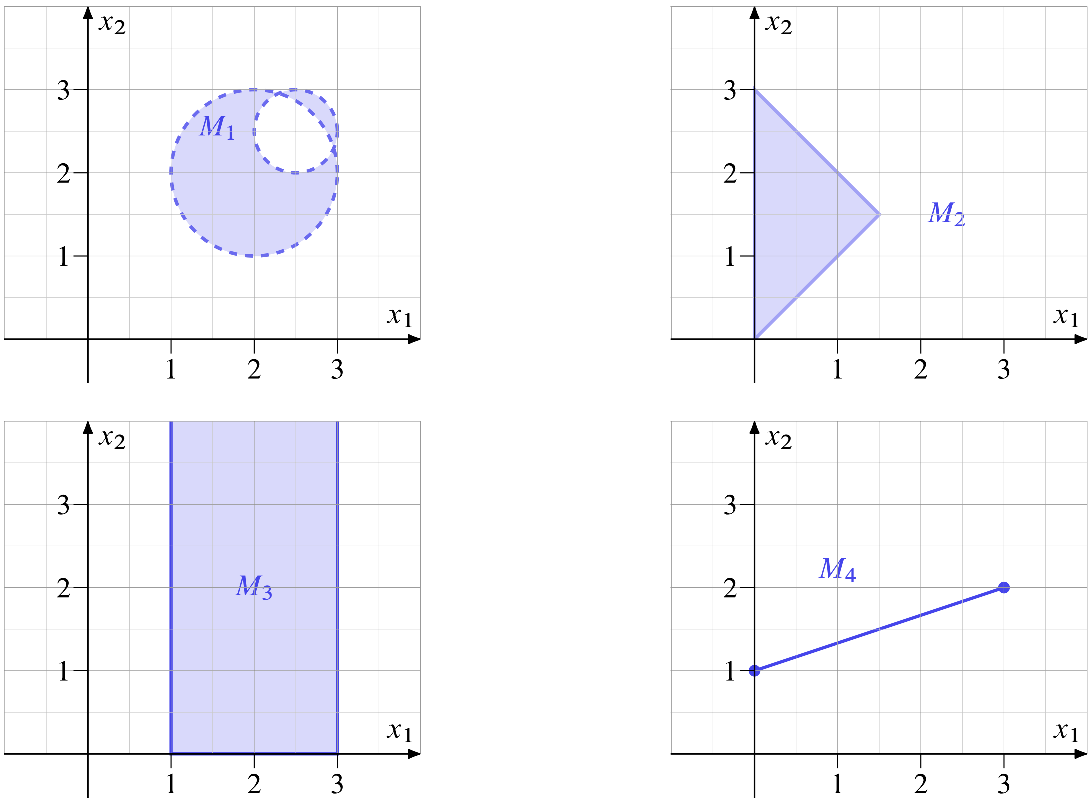
Lösungshinweis:

Aufgabe 4 **12 Punkte**

Gegeben sind die vier Mengen

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : (x_1 - 2.5)^2 + (x_2 - 2.5)^2 > 0.25 \text{ und } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 < 1\right\} , \\
M_2 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_2 \geqq x_1 \text{ und } x_1 + x_2 \leqq 3\right\} , \\
M_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : 1 \leqq x_1 \leqq 3\right\} , \\
M_4 &= \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \leqq 3 \text{ und } x_2 = \frac{1}{3}x_1 + 1\right\} .
\end{aligned}
$$

a) Zeichnen Sie die Mengen $M_1, \ldots, M_4$ jeweils in das zugehörige Koordinatensystem ein.



b) Kreuzen Sie in nebenstehender Tabelle jeweils genau die Eigenschaften an, die für die jeweilige Menge zutreffen.

Menge	M_1	M_2	M_3	M_4
offen	X			
abgeschlossen		X	X	X
beschränkt	X	X		X
konvex		X	X	X
leer				

Lösungshinweis:

Aufgabe 5 **11 Punkte**

Betrachtet wird eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Von M sind die Eigenwerte λ_i sowie die zugehörigen Eigenvektoren v_i bekannt:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix M.

Lösungshinweis:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für die Matrix M:

$$M = X \cdot L \cdot X^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 — 12 Punkte

Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
G_1: & & & x_2 & + & & & 4x_4 & + & x_5 & = & 50 \\
G_2: & -1x_1 & + & 5x_2 & + & -1x_3 & + & 4x_4 & + & 9x_5 & = & 50 \\
G_3: & x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & & & & = & 40 \\
G_4: & -1x_1 & + & 5x_2 & + & -1x_3 & + & 4x_4 & + & 9x_5 & = & 50 \\
G_5: & & & 4x_2 & + & x_3 & + & & & 4x_5 & = & 20
\end{array}
$$

a) Nutzen Sie den Algorithmus von Gauß und Jordan zur Lösung linearer Gleichungssysteme, um das folgende Tableau zu vervollständigen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Operation
(1)	0	1	0	4	1	50	
(2)	−1	5	−1	4	9	50	
(3)	1	4	3	0	0	40	
(4)	−1	5	−1	4	9	50	
(5)	0	4	1	0	4	20	
(6)	1	4	3	0	0	40	$+1 \cdot$ (3)
(7)	0	1	0	4	1	50	(1) $+ 0 \cdot$ (3)
(8)	0	9	2	4	9	90	(2) $+ 1 \cdot$ (3)
(9)	0	9	2	4	9	90	(4) $+ 1 \cdot$ (3)
(10)	0	4	1	0	4	20	(5) $+ 0 \cdot$ (3)
(11)	1	0	3	−16	−4	−160	(6) $- 4 \cdot$ (7)
(12)	0	1	0	4	1	50	$+1 \cdot$ (7)
(13)	0	0	2	−32	0	−360	(8) $- 9 \cdot$ (7)
(14)	0	0	2	−32	0	−360	(9) $- 9 \cdot$ (7)
(15)	0	0	1	−16	0	−180	(10) $- 4 \cdot$ (7)
(16)	1	0	0	32	−4	380	(11) $- 3 \cdot$ (15)
(17)	0	1	0	4	1	50	(12) $+ 0 \cdot$ (15)
(18)	0	0	1	−16	0	−180	$+1 \cdot$ (15)
(19)	0	0	0	0	0	0	(13) $- 2 \cdot$ (15)
(20)	0	0	0	0	0	0	(14) $- 2 \cdot$ (15)

b) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an.

c) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an, wenn $x_4 = 0$ und $x_5 = 10$ beträgt.

Lösungshinweis:

b) Es gibt unendlich viele Lösungen:

$$x_1 = 380 - 32x_4 + 4x_5, \quad x_2 = 50 - 4x_4 - x_5, \quad x_3 = -180 + 16x_4, \quad x_4, x_5 \text{ beliebig wählbar}$$

c) $x_1 = 420, x_2 = 40, x_3 = -180, x_4 = 0, x_5 = 10$

Aufgabe 7 **10 Punkte**

Gegeben sind die Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Außerdem ist bekannt, dass $\det(A) = -6$ und $\det(B) = 1$ (Das müssen Sie nicht nachrechnen). Berechnen Sie damit

a) $\det(A^{-1})$

b) $\det(AB)$

c) $\det(A + B)$

d) $\det(A^2 B^{-1})$

e) $\det(2B)$

Lösungshinweis:

a) $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{6}$

b) $\det(AB) = -6 \cdot 1 = -6$

c) $\det(A + B) = -20$ (Keine Rechenregel, muss man entwickeln)

d) $\det(A^2 B^{-1}) = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{1} = -\frac{1}{36}$

e) $\det(2B) = 2^4 \cdot \det(B) = 16$