Klausur Wirtschaftsmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 3. Dezember 2016 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wirtschaftsingenieurwesen
Punkte: 16, 20, 13, 21, 12, 8 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 16 Punkte

Der Nikolaus hat nach einem totsicheren Tipp seiner Weihnachtswichtel sein ganzes Erspartes in die Firma *Rudolph Enterprises* gesteckt. Mittlerweile ist die Firma pleite und das Geld ist futsch. Zu allem Überfluss muss der Weihnachtsschlitten repariert werden, Kostenpunkt 200 000 €. Der Nikolaus muss sich das Geld von der Nordpolbank zu einem jährlichen Zins von 11 % leihen. Die Schuldsumme soll annuitätisch zurückbezahlt werden mit einer Anfangstilgung von 2 %.

a) Wie hoch ist die Annuität A? 4

(*Hinweis*: Falls Sie a) nicht lösen können, rechnen Sie bitte mit dem (falschen) Ergebnis 23 000 € weiter)

4 b) Stellen Sie die 14. Zeile des Tilgungsplans auf.

c) Wie lange dauert es, bis die Schuld komplett getilgt ist? 18 Jahre, 4

d) Wie hoch ist die Restschuld zu Beginn des letzten Jahres? Wie hoch ist die Annuität im letzten Jahr?
4 Zinsen vergessen: -2

Lösungshinweis:

Richtiger Tilgungsplan:

```
TP(A)

##    Jahr Restschuld     Zins  Tilgung Annuitaet
## 1     1  200000,00 22000,00  4000,00  26000,00
## 2     2  196000,00 21560,00  4440,00  26000,00
## 3     3  191560,00 21071,60  4928,40  26000,00
## 4     4  186631,60 20529,48  5470,52  26000,00
## 5     5  181161,08 19927,72  6072,28  26000,00
## 6     6  175088,79 19259,77  6740,23  26000,00
## 7     7  168348,56 18518,34  7481,66  26000,00
## 8     8  160866,90 17695,36  8304,64  26000,00
## 9     9  152562,26 16781,85  9218,15  26000,00
## 10   10  143344,11 15767,85 10232,15  26000,00
## 11   11  133111,96 14642,32 11357,68  26000,00
## 12   12  121754,28 13392,97 12607,03  26000,00
## 13   13  109147,25 12006,20 13993,80  26000,00
## 14   14   95153,45 10466,88 15533,12  26000,00
## 15   15   79620,33  8758,24 17241,76  26000,00
## 16   16   62378,56  6861,64 19138,36  26000,00
## 17   17   43240,21  4756,42 21243,58  26000,00
## 18   18   21996,63  2419,63 21996,63  24416,26
```

versehentl. 15. Zeile: -2

Falscher Tilgungsplan:

```
TP(A.falsch)

##    Jahr  Restschuld     Zins  Tilgung Annuitaet
## 1     1 200000,0000 22000,00  1000,00 23000,000
## 2     2 199000,0000 21890,00  1110,00 23000,000
## 3     3 197890,0000 21767,90  1232,10 23000,000
## 4     4 196657,9000 21632,37  1367,63 23000,000
## 5     5 195290,2690 21481,93  1518,07 23000,000
## 6     6 193772,1986 21314,94  1685,06 23000,000
## 7     7 192087,1404 21129,59  1870,41 23000,000
## 8     8 190216,7259 20923,84  2076,16 23000,000
## 9     9 188140,5657 20695,46  2304,54 23000,000
## 10   10 185836,0280 20441,96  2558,04 23000,000
## 11   11 183277,9910 20160,58  2839,42 23000,000
## 12   12 180438,5700 19848,24  3151,76 23000,000
## 13   13 177286,8128 19501,55  3498,45 23000,000
## 14   14 173788,3622 19116,72  3883,28 23000,000
## 15   15 169905,0820 18689,56  4310,44 23000,000
## 16   16 165594,6410 18215,41  4784,59 23000,000
## 17   17 160810,0515 17689,11  5310,89 23000,000
## 18   18 155499,1572 17104,91  5895,09 23000,000
## 19   19 149604,0645 16456,45  6543,55 23000,000
## 20   20 143060,5116 15736,66  7263,34 23000,000
## 21   21 135797,1679 14937,69  8062,31 23000,000
## 22   22 127734,8563 14050,83  8949,17 23000,000
## 23   23 118785,6905 13066,43  9933,57 23000,000
## 24   24 108852,1165 11973,73 11026,27 23000,000
## 25   25  97825,8493 10760,84 12239,16 23000,000
## 26   26  85586,6927  9414,54 13585,46 23000,000
## 27   27  72001,2289  7920,14 15079,86 23000,000
## 28   28  56921,3641  6261,35 16738,65 23000,000
## 29   29  40182,7141  4420,10 18579,90 23000,000
## 30   30  21602,8127  2376,31 20623,69 23000,000
## 31   31    979,1221   107,70   979,13  1086,826
```

Aufgabe 2 — 20 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion Z und den Nebenbedingungen $N_1, \ldots, N_4$ mit

Z	$5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$	$\to$	max
N_1	$2x_1 + x_2 +$	$\leq$	50
N_2	$x_1 + 2x_4$	$\leq$	100
N_3	$2x_3 + 3x_4$	$\leq$	90
N_4	$x_1 + 2x_3 +$	$\leq$	20

a) Stellen Sie das Start-Tableau des Simplex-Algorithmus auf.

b) Nach Iterationen des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau (mit der Zielfunktion in Zeile (11)):

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		Operation
(11)	0	0	4	−1	1	0	0	3	110	(6) + 1 · (7)
(12)	0	1	−4	0	1	0	0	−2	10	+1 · (7)
(13)	0	0	−2	2	0	1	0	−1	80	(8) + 0 · (7)
(14)	0	0	2	3	0	0	1	0	90	(9) + 0 · (7)
(15)	1	0	2	0	0	0	0	1	20	(10) + 0 · (7)

Vervollständigen Sie den Simplexalgorithmus bis zum Erreichen einer optimalen Lösung.

c) Geben Sie im Optimum jeweils den Wert aller Struktur- und aller Schlupfvariablen sowie den Wert der Zielfunktion an.

Lösungshinweis:

(7)

∄ Schlupf −3

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4		Operation
(1)	−5	−1	−2	−1	0	0	0	0	0	
(2)	2	1	0	0	1	0	0	0	50	
(3)	1	0	0	2	0	1	0	0	100	
(4)	0	0	2	3	0	0	1	0	90	
(5)	1	0	2	0	0	0	0	1	20	
(6)	0	−1	8	−1	0	0	0	5	100	(1) + 5 · (5)
(7)	0	1	−4	0	1	0	0	−2	10	(2) − 2 · (5)
(8)	0	0	−2	2	0	1	0	−1	80	(3) − 1 · (5)
(9)	0	0	2	3	0	0	1	0	90	(4) + 0 · (5)
(10)	1	0	2	0	0	0	0	1	20	+1 · (5)
(11)	0	0	4	−1	1	0	0	3	110	(6) + 1 · (7)
(12)	0	1	−4	0	1	0	0	−2	10	+1 · (7)
(13)	0	0	−2	2	0	1	0	−1	80	(8) + 0 · (7)
(14)	0	0	2	3	0	0	1	0	90	(9) + 0 · (7)
(15)	1	0	2	0	0	0	0	1	20	(10) + 0 · (7)
(16)	0	0	14/3	0	1	0	1/3	3	140	(11) + 1/3 · (14)
(17)	0	1	−4	0	1	0	0	−2	10	(12) + 0 · (14)
(18)	0	0	−10/3	0	0	1	−2/3	−1	20	(13) − 2/3 · (14)
(19)	0	0	2/3	1	0	0	1/3	0	30	+1/3 · (14)
(20)	1	0	2	0	0	0	0	1	20	(15) + 0 · (14)

(7)

(6) $x_1 = 20$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, $x_4 = 30$

$y_1 = y_3 = y_4$, $y_2 = 20$

Aufgabe 3 — 13 Punkte

Bestimmen Sie für $x > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y = x(3y' - 1) - 1, \quad y(2) = 3.$$

$$\frac{y+1+x}{3x} = y' \qquad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{3x} y + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}$$

$f(x)$ $s(x)$

Lösungshinweis:

Loesung fehlt noch:

$\Leftrightarrow$	$y' = \frac{1}{2x} \cdot y + \frac{1}{2}(1 + x^{-1})$
allgemeine homogene Lösung:	$y_{\text{hom}} = C \cdot e^{\frac{1}{2}\int x^{-1}\,dx} = C \cdot x^{\frac{1}{2}}$
mit	$C(x) = \int \frac{\frac{1}{2}(1 + x^{-1})}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$
folgt die partikuläre Lösung	$y_p = x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) = x - 1$
Und damit die Gesamtlösung	$y(x) = C \cdot x^{\frac{1}{2}} + x - 1$
Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:	$y(1) = C\sqrt{1} + 1 - 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2$
Ergebnis:	$y = 2\sqrt{x} + x - 1$

Ergebnis:

$$y(x) = \frac{x}{2} + 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}} - 1$$

$$y_H = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx} = \boxed{x^{1/3}} \quad (3)$$

$$y_P = y_H \cdot \int \frac{s(x)}{y_H}\,dx = x^{1/3} \cdot \int \left[\frac{1+x}{x^{1/3}(3x)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{3} x^{1/3} \cdot \int \left(x^{-4/3} + x^{-1/3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^{1/3} \left(\frac{x^{-1/3}}{-1/3} + \frac{3}{2} \cdot x^{2/3}\right)$$

$$= \boxed{-1 + \frac{1}{2} x} \quad (4)$$

$$\Rightarrow y = y_H + y_P = \boxed{x^{1/3} \cdot c + \frac{1}{2}x - 1} \quad (3)$$

$$2^{1/3} \cdot c + 1 - 1 = 3$$

$$c = \boxed{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

$$\Rightarrow y = \boxed{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} - 1}$$

Aufgabe 4 — 21 Punkte

Die Weihnachtswichtel haben einen neuen Sport: Wer schafft es, die meisten Lebkuchen aus dem Privatvorrat des Nikolaus zu stibitzen? Alle Wichtel tragen sich mit ihren Erfolgen in eine Liste ein. Es ergibt sich folgende Häufigkeitstabelle.

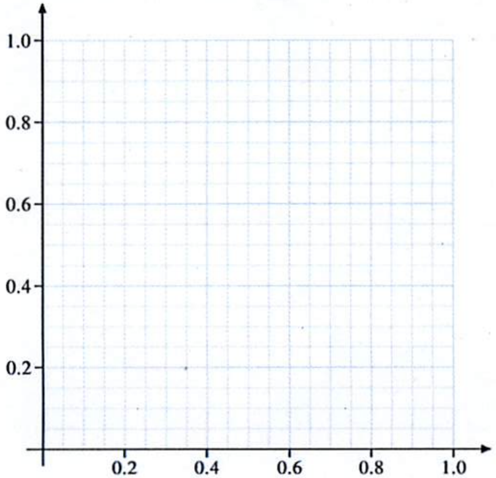
Anzahl geklaute Lebkuchen (a_i)	0	1	2	3	10	20
Häufigkeit (h_i)	6	6	4	2	1	1

a) Erstellen Sie eine Tabelle, die die Koordinaten der Lorenzkurve enthält. Zeichnen Sie die Lorenzkurve in nebenstehendes Diagramm.

b) Bestimmen Sie den Mittelwert, den Median, die Standardabweichung, $f(4)$ und $F(4)$ der Verteilung.

c) Bestimmen Sie das 25 %- sowie das 75 %-Quantil der Daten.

d) Zeichnen Sie einen Boxplot der Daten.



Lösungshinweis:

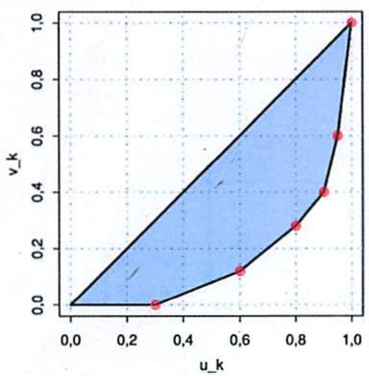
a) Tabelle:

3

i	1	2	3	4	5	6
u_k	0,30	0,60	0,80	0,90	0,95	1,00
v_k	0,00	0,12	0,28	0,40	0,60	1,00

Lorenzkurve:

3



b) Für das arithmetische Mittel bzw. den Median ergibt sich

2 1

$$\bar{x} = 2{,}5, \quad x_{\text{med}} = 1.$$

+1

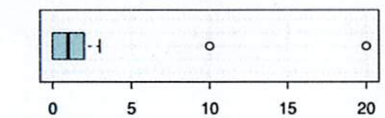
Die Standardabweichung beträgt $s \approx 4{,}5552$, außerdem gilt $f(4) = 0$ und $F(4) = 0{,}9$.

2 2

c)
```
## 0% 25% 50% 75% 100%
## 0  0   1   2   20
```

2 2

d) Boxplot:



3

Aufgabe 5 — 12 Punkte

Der Nikolaus versteckt seit Neuestem in jedem zehnten Geschenk eine Autogrammkarte von sich.

(Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Autogrammkarte zu enthalten, für jedes Geschenk gleich groß ist.)

Hugo erfährt davon, ist passionierter Nikolausfan und möchte unbedingt eine Autogrammkarte haben.

a) Im Kaufhaus werden Geschenke „direkt vom Nikolaus" verkauft. Hugo kauft sich davon für sich selbst 10, die er zufällig auswählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit diesem Einkauf mindestens eine Autogrammkarte erworben hat?

b) Wie viele Geschenke müsste Hugo kaufen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mindestens eine Autogrammkarte befindet, mindestens 99 % sein soll?

c) Wie viele Autogrammkarten müsste der Nikolaus pro 10 Geschenke verteilen, so dass Hugo, wenn er 10 Geschenke zufällig auswählt mindestens eine Autogrammkarte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % erhält (es wird ein ganzzahliges Ergebnis gesucht)?

Lösungshinweis:

4

a) $P(X \geqq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} = 1 - 0.9^{10} \approx \boxed{0{,}6513}$

b) $1 - 0.9^n \geqq 0.99$. Also:

4

$$\frac{\ln 0.01}{\ln 0.9} \approx \boxed{43{,}709 \text{ also mind. } 44} \text{ Geschenke müsste er kaufen}$$

c) Sei k die (durchschn.) Anzahl von Autogrammkarten pro 10 Geschenken, also $X \sim B(n = 10, p = k/10)$. Dann folgt:

$$P(X \geqq 1) \geqq 0.99 \quad \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{k}{10}\right)^{10} \geqq 0.99$$

0.01 0,1

$$\Leftrightarrow 0.01^{0.1} \geqq 1 - \frac{k}{10} \Leftrightarrow k \geqq 10 \cdot (1 - 0.01^{0.1}) \approx \boxed{3{,}69}$$

Also sind mind. $\boxed{\text{4 Karten}}$ pro 10 Geschenke nötig.

4

Aufgabe 6

8 Punkte

Der Nikolaus hat sich eine Videoüberwachung einbauen lassen, um die Weihnachtswichtel am Lebkuchenklauen zu hindern. Nachdem er die Videoaufzeichnungen der letzten 20 Tage durchgesehen hat, erstellt er eine Liste (und überprüft sie zweimal) mit der Anzahl der pro Tag durch die Wichtel entwendeten Lebkuchen. Es ergibt sich:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Lebkuchen	3	12	10	13	16	7	7	6	11	10
Tag	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl Lebkuchen	14	8	9	9	9	11	6	5	7	8

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Anzahl der Lebkuchen pro Tag eine einfache Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit darstellen.

Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für die im Durchschnitt pro Tag entwendeten Lebkuchen zu einem Konfidenzniveau von 99 %.

Lösungshinweis:

$$c = \boxed{x_{0,975} = 2{,}861}, \boxed{\bar{x} = 9{,}05}, \boxed{s = 3{,}187} \quad \Rightarrow \quad \left[\bar{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}}\right] = \boxed{[7{,}011;\ 11{,}089]}$$

2 2 2 2