

# Nachholklausur Wirtschaftsmathematik

## Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 10. März 2018 – Prüfer: Etschberger

Studiengang: Wirtschaftsingenieurwesen

Punkte: 13, 18, 18, 14, 16, 11 ; Summe der Punkte: 90

### Aufgabe 1

13 Punkte

Eva feiert heute, am 1. Januar 2018, ihren 18. Geburtstag. Sie möchte ab heute für Ihr Alter vorsorgen, eröffnet zu diesem Zweck ein Konto und beginnt sofort regelmäßig zu sparen, um dann im Alter von dem angesparten Geld inkl. Zinsen regelmäßig einen konstanten Betrag zu entnehmen, bis der Kontostand 0 € beträgt.

Gehen Sie im Folgenden von einem jährlichen Zinssatz von 1 % aus.

- Die Entnahmephase soll an Evas 68. Geburtstag beginnen. Bis dahin zahlt sie monatlich, jeweils zum Monatsbeginn, 300 € ein. Wie hoch ist dann der Kontostand?
- Welchen Betrag kann Eva ab Ihrem 68. Geburtstag monatlich vorschüssig abheben, wenn der Kontostand an Ihrem 98. Geburtstag 0 € betragen soll.
- Wie lange könnte sie in der Entnahmephase monatlich nachschüssig 900 € entnehmen?

### Lösungshinweis:

Rentenersatzrate:

$$\text{a) } r_e = 300 \cdot \left(12 + 0,01 \cdot \frac{13}{2}\right) \approx 3619,5 \text{ €}$$

$$\Rightarrow R_n^A = 3619,5 \cdot \frac{1,01^{50} - 1}{1,01 - 1} \approx 233324,4879164 \text{ €}$$

$$\text{b) } R_n^A = R_0^E = r \cdot \left(12 + 0,01 \cdot \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{1,01^{30} - 1}{1,01 - 1} \cdot 1,01^{-30}$$

$$\Leftrightarrow r = r_A \cdot \frac{q^{50} - 1}{1 - q^{-30}} \approx 749,3480045 \text{ €}$$

$$\text{c) } r_e = 900 \cdot \left(12 + i \cdot \frac{11}{2}\right) \approx 10849,5$$

$$n = -\log_q \left[ 1 - \frac{R_0^E}{r_e} \cdot i \right] \approx 24,3350995 \text{ Jahre, also ca. 24 Jahre und 4 Monate.}$$

## Aufgabe 2

18 Punkte

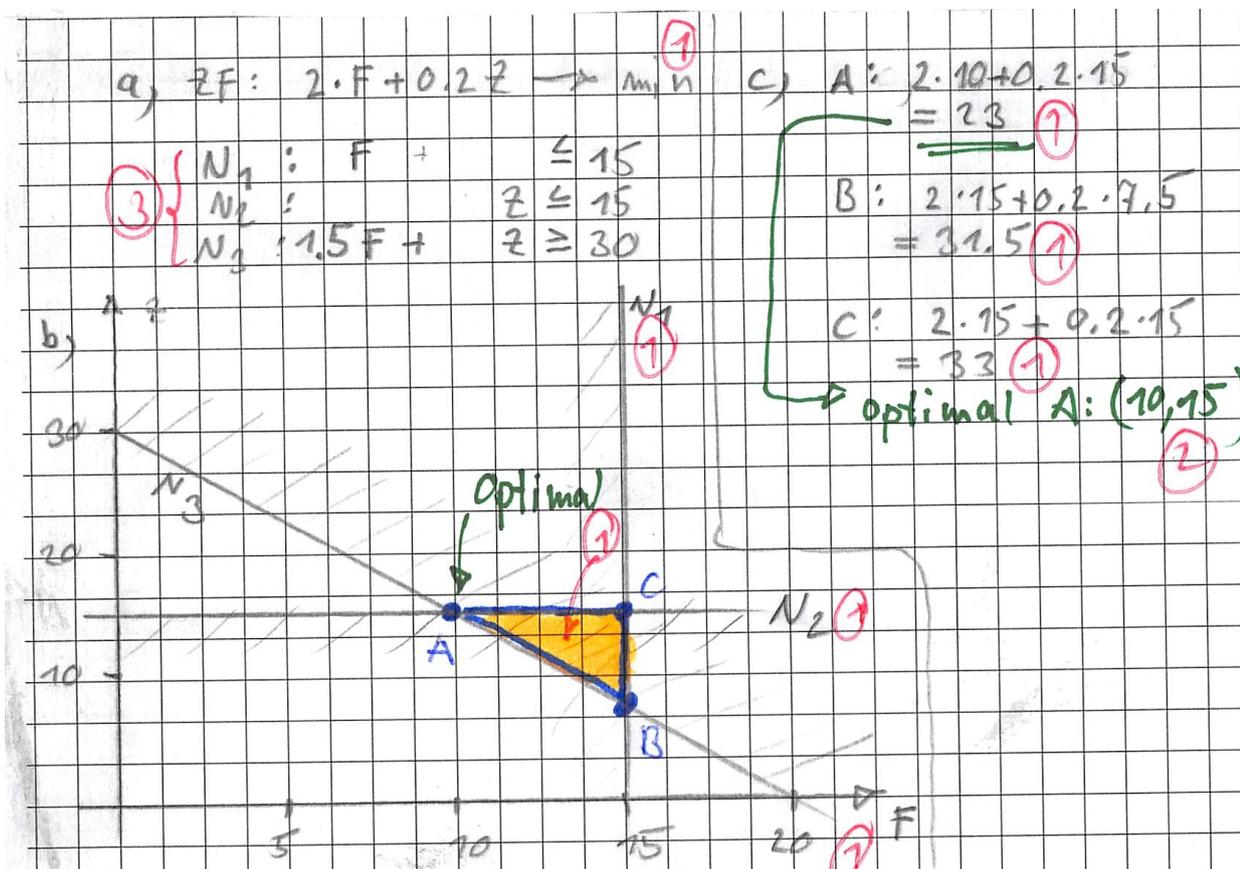
Eine Marmelade wird aus Früchten (Menge  $F$  in kg) und Zucker ( $Z$  in kg) hergestellt. Ein kg Früchte kostet 2 € und ein kg Zucker kostet 0.2 €. Der Marmeladenfabrikant verfügt über maximal 15 kg Früchte und 15 kg Zucker. Im Produktionsprozess der Marmelade muss der Zusammenhang

$$1.5F + Z \geq 30$$

gelten. Ziel ist es, die Marmelade unter Einhalten der Restriktionen möglichst kostengünstig herzustellen.

- Stellen Sie Zielfunktion und Restriktionen des linearen Optimierungsproblems auf.
- Zeichnen Sie die Restriktionen in ein Koordinatensystem ein und markieren Sie den Zulässigkeitsbereich.
- Bestimmen Sie die günstigste Mengenkombination an Früchten und Zucker.

### Lösungshinweis:



### Aufgabe 3

18 Punkte

Bestimmen Sie für  $t > 0$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$2ts' - s = t + 1, \quad s(2) = 4.$$

Lösungshinweis:

$\Leftrightarrow$

$$s' = \frac{1}{2t} \cdot s + \frac{1}{2}(1 + t^{-1})$$

allgemeine homogene Lösung:

$$s_{\text{hom.}} = C \cdot e^{\frac{1}{2} \int t^{-1} dt} = C \cdot t^{\frac{1}{2}}$$

mit

$$C(t) = \int \frac{\frac{1}{2}(1 + t^{-1})}{t^{\frac{1}{2}}} dt = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$$

folgt die partikuläre Lösung

$$s_p = t^{\frac{1}{2}} \cdot (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = t - 1$$

Und damit die Gesamtlösung

$$s(t) = C \cdot t^{\frac{1}{2}} + t - 1$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:

$$s(2) = C\sqrt{2} + 2 - 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ergebnis:

$$s = 3\sqrt{\frac{t}{2}} + t - 1$$

**Aufgabe 4****14 Punkte**

1000 Anleger wurden gefragt, ob sie einen Teil ihres Vermögens in Bitcoin oder Gold angelegt haben. Aus der Umfrage ergab sich folgende Tabelle:

		Bitcoins	
		ja	nein
Gold	ja	1	500
	nein	450	49

- Wie hoch ist der prozentuale Anteil der befragten Personen, die ihr Vermögen weder in Bitcoins noch in Gold angelegt haben?
- Wie hoch ist der Anteil der Bitcoin-Anleger unter den Befragten, die einen Teil ihres Vermögens auch in Gold angelegt haben?
- Berechnen Sie den normierten Kontingenzkoeffizienten.

**Lösungshinweis:**

- 0.049
- $1/45 \approx 0.0022$
- $K = \sqrt{\frac{817}{1000+817}} \approx 0.67, K^* = \sqrt{2} \cdot K \approx 0.9484$

## Aufgabe 5

16 Punkte

Die meisten Tachometer von Autos sind nicht sehr genau und zeigen etwas mehr als die tatsächlich gefahrene Geschwindigkeit an. Gehen Sie davon aus, dass die angezeigte Geschwindigkeit  $X$  bei einer tatsächlichen Geschwindigkeit von 100 km/h einer normalverteilten Zufallsvariable  $X \sim N(\mu, \sigma)$  entspricht.

Von einem Autozulieferer werden die Tachometer so kalibriert, dass bei einer tatsächlichen Fahrtgeschwindigkeit von 100 km/h

- ▶ bei 1 % der Autos weniger als 100 km/h sowie
- ▶ bei 5 % der Autos mehr als 120 km/h angezeigt werden.

Gehen Sie im Folgenden von Geschwindigkeitsmessungen eines zufällig ausgewählten Tachometers bei einer tatsächlichen Fahrtgeschwindigkeit von 100 km/h aus.

- a) Berechnen Sie die Standardabweichung  $\sigma$  sowie den Erwartungswert  $\mu$  von  $X$ .
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Messung mit mehr als 110 km/h?
- c) Bestimmen Sie das 99 %-Quantil  $x_{0,99}$  der Verteilung. Was bedeutet diese Zahl bezogen auf die Geschwindigkeitsmessung?

### Lösungshinweis:

$$\text{a) } \Phi\left(\frac{\mu - 100}{\sigma}\right) = 0.99 \quad \text{und} \quad \Phi\left(\frac{120 - \mu}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \mu - 100 \approx 2.33 \cdot \sigma \quad \text{und} \quad 120 - \mu \approx 1.64 \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma \approx \frac{120 - 100}{2.33 + 1.64} \approx 5,0377834 \quad \text{und} \quad \mu \approx 2.33 \cdot \sigma + 100 \approx 111,7380353$$

$$\text{b) } P(X \geq 110) \approx 0,6368307$$

$$\text{c) } x_{0,99} \approx 123,4576719. \text{ Auf lange Sicht höchstens } 123,46 \text{ km/h gemessen bei } 99 \% \text{ der Tachometer.}$$

## Aufgabe 6

11 Punkte

Die meisten Tachometer von Autos sind nicht sehr genau. Es soll im Folgenden die durchschnittliche gemessene Geschwindigkeit bei einer tatsächlich gefahrenen Geschwindigkeit von 100 km/h mit einer einfachen Stichprobe von 18 Autos geschätzt werden.

Gehen Sie davon aus, dass die angezeigte Tachometer-Geschwindigkeit bei einer tatsächlichen Fahrtgeschwindigkeit von 100 km/h einer normalverteilten Zufallsvariable  $X \sim N(\mu, \sigma)$  entspricht.

Die Messwerte sind im Einzelnen:

Stichprobenelement Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
gemessene Geschwindigkeit [in km/h]	109	112	108	108	112	109	109	106	101
Stichprobenelement Nr.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
gemessene Geschwindigkeit [in km/h]	108	107	110	111	106	110	107	114	109

Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für  $\mu$  zu einem Konfidenzniveau von 90 %.

**Lösungshinweis:**

$$c = x_{0,95} = 1,74, \bar{x} = 108,667, s = 2,87 \quad \Rightarrow \quad \left[ \bar{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}} \right] = [107,49; 109,843]$$