Klausur Wirtschaftsmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 14. Dezember 2019 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wing
Punkte: 14, 13, 13, 32, 18 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 14 Punkte

Angela legt heute, am 1. Januar 2018, einen Betrag in Höhe von 2 000 000 € auf ein mit einem Zinssatz von 1 % p. a. verzinsten Konto an.

a) Wie hoch ist der Betrag inklusive Zinsen am 1.1.2068?

b) Wie hoch müsste der jährliche Zinssatz auf dem Anlagekonto sein, damit sie inkl. Zinsen am 1.1.2068 über einen Betrag in Höhe von 5 383 176.06 € verfügt?

c) Wie lange müsste Angela warten, bis sich ihre heute angelegten 2 000 000 € auf dem mit 1 % p. a. verzinsten Konto auf 8 000 000 € entwickelt hätte?

d) Angela zahlt heute 2 000 000 € auf das Konto ein. Wie hoch ist der Realwert dieser Einzahlung am 1.1.2068, wenn für die Anlagezeit zusätzlich zu dem Anlagezinssatz eine durchschnittliche jährliche Inflationsrate von 20 % p.a. angenommen werden kann?

Lösungshinweis:

a) $2\,000\,000 \cdot 1.01^{50} = 3\,289\,263.64$

b) $q = \sqrt[50]{\frac{5\,383\,176.06}{2\,000\,000}} \approx 1.0200 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\%$

c) $n = \log_{1.01} \frac{8\,000\,000}{2\,000\,000} \approx 139.3$, also nach 140 Jahren hat sie zum ersten mal mehr als 8 000 000 €.

d) $2\,000\,000 \cdot \left(\frac{1.01}{1.2}\right)^{50} = 361.44$

Aufgabe 2 — 13 Punkte

Augustus möchte seine finanzielle Situation im Alter verbessern.

Zu diesem Zweck möchte er regelmäßig pro Monat nachschüssig einen Betrag in Höhe von 4887.98 € insgesamt 15 Jahre lang auf ein mit 5% p.a. verzinstes Konto einzahlen.

a) Berechnen Sie den nach dieser Zeit angesparten Betrag.

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen können rechnen Sie mit dem (falschen) Betrag 647 356.91 € *weiter.*

b) Wieviele Wochen kann Augustus direkt im Anschluss an die Ansparphase pro Woche vorschüssig 2339.15 € von diesem Konto entnehmen, bis der Kontostand 0 € beträgt?
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Jahr aus genau 52 Wochen besteht.

Lösungshinweis:

Anzahl.Raten.A	180.00
Anzahl.Raten.E	780.00
re.E	124735.69
Rn.A	1294713.81
Rn.A.falsch	647356.91
n.e.falsch	320.18

Aufgabe 3 **13 Punkte**

Frau Maier hat sich ein neues Fernsehgerät für 1200 € gekauft. Dieser soll innerhalb von 10 Jahren zu einem Jahreszins von 3.9 % annuitätisch getilgt werden.

a) Wie hoch ist die Annuität bei jährlichen Zahlungen?
(*Hinweis: Sollten Sie Teilaufgabe a) nicht lösen können rechnen Sie bitte mit dem (falschen) Teilergebnis* $A = 132.49$ *weiter*)

b) Ermitteln Sie die Restschuld nach 8 Jahren.

c) Tragen Sie die Werte der 9. und der 10. Zeile des Tilgungsplans in folgende Tabelle ein:

Jahr	Restschuld zu Beginn	Zinsen	Tilgung
9	278.06	10.84	136.37
10	141.69	5.53	141.69

Lösungshinweis:

a) $A = \dfrac{i}{1 - q^{-n}} \approx 147.21$ €
($A_{\text{falsch}} = 132.49$)

b) $R_8 = A \cdot \dfrac{q^8 - 1}{q - 1} - S \cdot q^8 \approx 278.06$ €
(falsch: $R_8 \approx 413.24$ €)

c) Tilgungsplan:

	Jahr	Rk	Zk	Tk
1	1	1200.00	46.80	100.41
8	8	409.31	15.96	131.25
9	9	278.06	10.84	136.37
10	10	141.69	5.53	141.69

Tilgungsplan falsch:

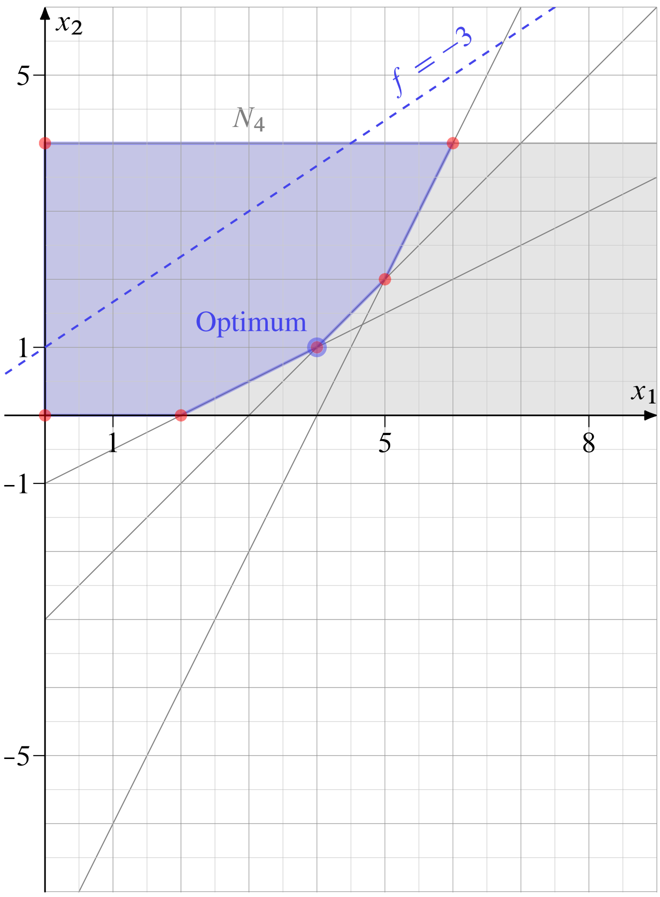
	Jahr	Rk	Zk	Tk
1	1	1200.00	46.80	85.69
8	8	525.25	20.48	112.01
9	9	413.24	16.12	116.37
10	10	296.87	11.58	120.91

Aufgabe 4 — 32 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit

- den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$,
- der Zielfunktion $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ und
- den Nebenbedingungen N_1, N_2, N_3, N_4 (dabei ist N_4 nur teilweise gegeben).

f	$2x_1$	$-$	$3x_2$	$\to$	max
N_1	x_1	$-$	$2x_2$	$\leqq$	2
N_2	$-x_1$	$+$	x_2	$\geqq$	-3
N_3	$2x_1$	$-$	x_2	$\leqq$	8
N_4	$\boxed{0x_1}$	$+$	$\boxed{-x_2}$	$\geqq$	$\boxed{-4}$



a) Die graphische Repräsentation von N_4 ist im Koordinatensystem eingezeichnet. Füllen Sie in der Tabelle oben die fehlenden Felder von N_4 aus.

b) Zeichnen Sie N_1, N_2, N_3 sowie den Zulässigkeitsbereich des Problems in das Koordinatensystem ein.

c) Markieren Sie die für ein Optimum in Frage kommenden Ecken.

d) Zeichnen Sie alle Punkte der Zielfunktion für $f(x_1, x_2) = -3$ ein (Isonutzengerade).

e) Berechnen Sie die Koordinaten im Optimum sowie den dazugehörigen Wert der Zielfunktion.

f) Nach einem Schritt des Simplexalgorithmus ergibt sich das folgende Tableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		Operation
6	0	-1	2	0	0	0	4	$1 + 2 \cdot 2$
7	1	-2	1	0	0	0	2	$+1 \cdot 2$
8	0	1	-1	1	0	0	1	$3 - 1 \cdot 2$
9	0	3	-2	0	1	0	4	$4 - 2 \cdot 2$
10	0	1	0	0	0	1	4	$5 + 0 \cdot 2$

Dabei bezeichnet die Zeile Nummer 6 die Zielfunktion. Führen sie einen weiteren Simplexschritt durch.

g) Geben Sie den Wert aller Struktur-, Schlupfvariablen sowie der Zielfunktion nach diesem Schritt an.

h) Interpretieren Sie im Endtableau den Wert der Zielfunktionszeile unter der Schlupfvariable y_1.

Lösung Simplex

11	0	0	1	1	0	0	5	$6 + 1 \cdot 8$
12	1	0	-1	2	0	0	4	$7 + 2 \cdot 8$
13	0	1	-1	1	0	0	1	$+1 \cdot 8$
14	0	0	1	-3	1	0	1	$9 - 3 \cdot 8$
15	0	0	1	-1	0	1	3	$10 - 1 \cdot 8$

Aufgabe 5 **18 Punkte**

Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem:

$$1.5 - y = \frac{y'}{2x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 4\,.$$

a) Geben Sie die homogene Lösung y_H an.

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_P.

c) Wie heißt die allgemeine Lösung?

d) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

Lösungshinweis:

$$1.5 - y = \frac{y'}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = y \cdot (-2x) + 3x$$

a) $y_\mathrm{H} = \exp\left(\int -2x\,\mathrm{d}x\right) = C \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$

b) $$\begin{aligned} y_\mathrm{P} &= y_\mathrm{H} \cdot \int \frac{3x}{y_\mathrm{H}}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \int 3x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \\ &= 3 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2} 2x\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \int \mathrm{e}^{z}\mathrm{d}z \\ &= \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{x^2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

c) Allgemein: $y(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + 3/2$

d) Anfangsbedingung: $4 = C \cdot \mathrm{e}^0 + 3/2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 5/2$
Also:

$$y(x) = 1/2\left(5\mathrm{e}^{-x^2} + 3\right)$$