Klausur Wirtschaftsmathematik (alte PO)
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 16.3.2019 - Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wing
Punkte: 13, 17, 16, 16, 16, 12 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 13 Punkte

Im folgenden gelte ein jährlicher Kalkulationszinssatz von $i = q - 1$. Kreuzen Sie pro Aussage jeweils genau einmal wahr oder falsch an.

a) Bei einer Investition mit den Zahlungen B_t $(t = 0, \ldots, n)$ bezeichnet man den *internen Zins* als den Zinssatz $i = q - 1 \neq 0$, bei dem

	wahr	falsch
der Kapitalwert gleich dem Barwert aller negativen Zahlungen ist.		X
der Kapitalwert gleich 0 ist.	X	
die aufsummierten diskontierten künftigen (positiven) Rückflüsse der Summe der diskontierten (negativen) Investitionen entsprechen.	X	

b) Zu einem Investitionsprojekt mit den Zahlungen B_t zu den Zeitpunkten $t = 0, \ldots, n$ und einem Kalkulationszinssatz $i = q - 1$ bezeichnet man den Kapitalwert als

	wahr	falsch
die Summe der aufgezinsten Zahlungen $\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{n-t}$.		X
die Summe der diskontierten Zahlungen $\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t}$.	X	
die Summe der Zinsen der Zahlungen $\sum_{t=0}^{n} B_t \left(q^{n-t} - 1\right)$.		X

c) Zwei Geldbeträge B_{t_1}, B_{t_2}, die jeweils zu den Zeitpunkten $t_1 < t_2$ gezahlt werden heißen finanzmathematisch äquivalent, genau dann wenn

	wahr	falsch
B_{t_1} sich von B_{t_2} um $i \cdot (t_2 - t_1)$ unterscheidet.		X
$B_{t_1} : B_{t_2} = q^{t_1 - t_2}$.	X	
B_{t_1} und B_{t_2} gleich hoch sind.		X
$B_{t_1} \cdot q^{t_2} = B_{t_2} \cdot q^{t_1}$.	X	

d) Mit welchem Monatszinsfaktor q_{Monat} rechnen Sie bei regelmäßigen, konstant hohen monatlichen Zahlungen bei einem nominalen Jahreszinsfaktor von $q = i + 1$ und monatlicher Zinsabrechnung?

	wahr	falsch
$q_{\text{Monat}} = \sqrt[12]{i + 1}$	X	
$q_{\text{Monat}} = \sqrt{q/12}$		X
$q_{\text{Monat}} = \dfrac{i}{12} + 1$		X

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Gehen Sie im Folgenden von einem jährlichen Zinssatz von 1.5 % aus.

a) Ingo legt ab heute, den 1. Januar 2018, zu Beginn jedes Jahres 500 € auf ein Konto. Berechnen Sie, wieviel er nur durch diese Zahlungen und die Zinsen nach Ablauf von 8 Jahren angespart hat.

b) Inga legt zu Beginn jedes Monats 50 € auf ein Konto. Berechnen Sie den Endwert nach Ablauf von 8 Jahren.

c) Wie lange müsste Caesar zu Beginn jedes Monats 60 € auf ein Konto einzahlen, bis der Kontostand 5000 € beträgt?

Lösungshinweis:

ICMA:

→ keine Rente erkannt: 0 P

3 a) $R_n^a = 500 \cdot \dfrac{q^8 - 1}{q - 1} \cdot q \approx 4279.67$ €

4 b) $q_M = \sqrt[12]{1.015} \approx 1.001\,242$,
$n = 8 \cdot 12 = 96$

$$R_n^b = r \cdot \frac{q_M^{8\cdot 12} - 1}{q_M - 1} \cdot q_M^{-8\cdot 12} \cdot q_M \approx 5100.72\,€$$

Monate ignoriert: − 3

3 c) $n = \log_{q_M}\left[\dfrac{R_n}{r} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{q_M}\right)\right] \approx 79.25$ Monate, also ca. 6 Jahre und 7 Monate.

alte PO A4

Aufgabe 3 **14 Punkte**

Richard muss eine Schuld von 500 000 € innerhalb von 20 Jahren zu einem Jahreszins von 1.5 % annuitätisch tilgen.

a) Wie hoch ist die Annuität bei jährlichen Zahlungen?

b) Ermitteln Sie die Restschuld zu Beginn des 10. Jahres.

c) Geben Sie die 14. Zeile des Tilgungsplans an.

d) Angenommen die Annuität würde $A = 20386.01$ betragen. Wie lange würde es dann dauern, bis der Kredit vollständig getilgt wäre? Wie hoch wäre die Annuität im letzten Jahr?

Lösungshinweis:

aPo | neu

3 | 4 a) $A = \dfrac{i}{1-q^{-n}} \approx 29\,122.87$ €

3 | 4 b) $R_{10} = 293\,299.83$ → n = 10 eingesetzt −2 | −2

4 | 4 d) $n = -\ln(1 - \frac{S}{A} \cdot i) \big/ \ln(q) = -\ln\left(1 - \dfrac{500\,000}{20\,386.01} \cdot 0.015\right) \Big/ \ln(1.015) \approx 30.809\,227\,8,$

nur Laufzeit ausgerechnet: −2

also vollständig nach 31 Jahren getilgt.

Letzte Rate: Restschuld nach 31 Jahren plus Zins : $A_{31} = R_{31} \cdot 1.015 = 16\,520.32$

4 | 5 c)

Jahr	Restschuld	Tilgung	Zinsen
1	500000.00	21622.87	7500.00
2	478377.13	21947.21	7175.66
3	456429.92	22276.42	6846.45
4	434153.50	22610.57	6512.30
5	411542.94	22949.72	6173.14
6	388593.21	23293.97	5828.90
7	365299.24	23643.38	5479.49
8	341655.86	23998.03	5124.84
9	317657.83	24358.00	4764.87
10	293299.83	24723.37	4399.50
11	268576.46	25094.22	4028.65
12	243482.24	25470.63	3652.23
13	218011.61	25852.69	3270.17
14	192158.91	26240.48	2882.38
15	165918.43	26634.09	2488.78
16	139284.34	27033.60	2089.27
17	112250.74	27439.11	1683.76
18	84811.63	27850.69	1272.17
19	56960.93	28268.45	854.41
20	28692.48	28692.48	430.39

falsche Zeile ausgerechnet: −2 | −2

Jahr	Restschuld	Tilgung	Zinsen	A
1	500000.00	12886.01	7500.00	20386.01
2	487113.99	13079.30	7306.71	20386.01
3	474034.69	13275.49	7110.52	20386.01
4	460759.20	13474.62	6911.39	20386.01
5	447284.58	13676.74	6709.27	20386.01
6	433607.84	13881.89	6504.12	20386.01
7	419725.94	14090.12	6295.89	20386.01
8	405635.82	14301.47	6084.54	20386.01
9	391334.35	14515.99	5870.02	20386.01
10	376818.36	14733.73	5652.28	20386.01
11	362084.62	14954.74	5431.27	20386.01
12	347129.88	15179.06	5206.95	20386.01
13	331950.82	15406.75	4979.26	20386.01
14	316544.07	15637.85	4748.16	20386.01
15	300906.22	15872.42	4513.59	20386.01
16	285033.81	16110.50	4275.51	20386.01
17	268923.30	16352.16	4033.85	20386.01
18	252571.14	16597.44	3788.57	20386.01
19	235973.70	16846.40	3539.61	20386.01
20	219127.30	17099.10	3286.91	20386.01
21	202028.19	17355.59	3030.42	20386.01
22	184672.61	17615.92	2770.09	20386.01
23	167056.69	17880.16	2505.85	20386.01
24	149176.53	18148.36	2237.65	20386.01
25	131028.16	18420.59	1965.42	20386.01
26	112607.58	18696.90	1689.11	20386.01
27	93910.68	18977.35	1408.66	20386.01
28	74933.33	19262.01	1124.00	20386.01
29	55671.32	19550.94	835.07	20386.01
30	36120.38	19844.20	541.81	20386.01
31	16276.18	16276.18	244.14	16520.32

Aufgabe 4 **11 Punkte**

Ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Laufzeit von 20 Jahren ist mit einem Kupon von 3 % und einem Rücknahmekurs von 105 % ausgestattet. Zum Emissionszeitpunkt herrscht für dieses Papier eine Umlaufrendite von 2.5 %.

4 a) Wie hoch ist der Emissionskurs dieser Anleihe?

Hinweis: Falls Sie a) nicht lösen konnten, gehen Sie für Teilaufgabe b) vom (falschen) Wert von $C_0 = 103.5\,\%$ aus.

4 b) Berechnen Sie die Zahlungen von bzw. an einen Anleger zu den Zeitpunkten $t = 0, t = 1$ und $t = 20$, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Betrag von 300 000 € in die Anleihe investieren möchte.

3 c) Bestimmen Sie den Kurs unmittelbar nach der 6. Kuponzahlung, wenn zu diesem Zeitpunkt die Umlaufrendite 7 % beträgt.

Lösungshinweis:

a) $C_0 = 3 \cdot \dfrac{1 - 1.02^{-20}}{1.02 - 1} + 105 \cdot 1.02^{-20} = 110.85$

b) t_0: 300 000 € investiert (zu je 110.85 ergibt 2706.46 Papiere)
t_1: Kuponzahlungen von 3 € für 2706.46 Papiere ergibt eine Auszahlung von 8119.38 €
t_{50}: Kupon plus Rücknahmekurs: $(3 + 105) \cdot 2706.46 = 292\,297.59$ Euro

c) Restlaufzeit $20 - 6 = 14$ Jahre:

$$C_6 = 3 \cdot \frac{1 - 1.07^{-14}}{1.07 - 1} + 105 \cdot 1.07^{-14} = 66.96$$

$\rightarrow$ n = 6 eingesetzt: −3

alte PO A3 alte PO 16 P

Aufgabe 5

21 Punkte

Für die Herstellung von Nudeln benötigt man Eier (Menge E) und Mehl (Menge M in 100 g). Eine Mengeneinheit Eier kostet 20 Geldeinheiten, eine Mengeneinheit Mehl kostet 100 Geldeinheiten.

Der Produzent möchte seine Nudeln möglichst kostengünstig produzieren.

Es gelten folgende Restriktionen:

(I) Im Lager sind maximal 16 Einheiten Eier sowie 16 Einheiten Mehl vorrätig.

(II) Außerdem verlangt der Produktionsprozess, dass $5E + M \geqq 20$

alt neu (III) sowie $M \geqq 5$.

4 | 6 a) Stellen Sie Zielfunktion und Restriktionen des linearen Optimierungsproblems auf.

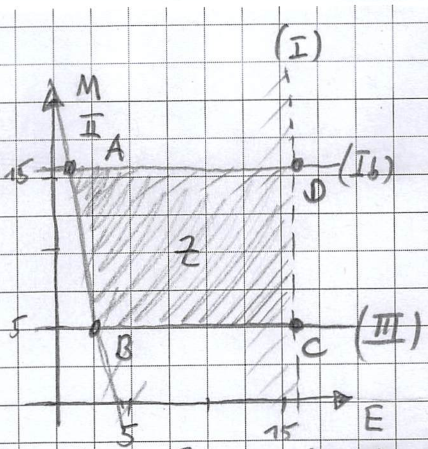
6 | 8 b) Zeichnen Sie die Restriktionen in ein Koordinatensystem ein und markieren Sie den Zulässigkeitsbereich.

6 | 7 c) Bestimmen Sie die günstigste Mengenkombination an Eiern und Mehl.

Lösungshinweis:

ZF $20E + 100M \rightarrow \min$.

(I)	E		$\leq$	16
(Ib)		M	$\leq$	16
(II)	$5E +$	M	$\geq$	20
(III)		M	$\geq$	5



A: $5E = 4 \Leftrightarrow E = 0.8$, $M = 16$; ZF $= 16 + 1600 = 1616$

B: $5E = 15 \Leftrightarrow E = 3$, $M = 5$ ZF $= 60 + 500 = 560$

C $E = 16$, $M = 5$ ZF $= 320 + 500 = 820$

$E = 16$, $M = 16$ $= 320 + 1600 = 1920$

Optimum bei $E = 3$, $M = 5$

Aufgabe 6 **21 Punkte**

Bestimmen Sie für $a > 0$ und die Funktion $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$a(2b' - 1) - b = 1, \quad b(2) = 4.$$

$\Leftrightarrow \quad b' = \frac{1}{2}\left(\frac{1+b}{a} + 1\right)$

Lösungshinweis:

$\Leftrightarrow$ 3 $$b' = \frac{1}{2a} \cdot \cancel{y}^{\,b} + \frac{1}{2}(1 + a^{-1})$$

allgemeine homogene Lösung: 3 $$b_{\text{hom.}} = C \cdot e^{\frac{1}{2}\int a^{-1}\,\mathrm{d}a} = C \cdot a^{\frac{1}{2}}$$

mit 3 $$C(x) = \int \frac{\frac{1}{2}(1 + a^{-1})}{a^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}a = a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}$$

folgt die partikuläre Lösung 3 $$b_p = a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) = a - 1$$

Und damit die Gesamtlösung 3 $$b(a) = C \cdot a^{\frac{1}{2}} + a - 1$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt: 3 $$b(2) = C\sqrt{2} + 2 - 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ergebnis: 3 $$b = 3\sqrt{\frac{a}{2}} + a - 1$$

alte PO: deckeln auf 16 P.

nur alte PO

Aufgabe 5 — 16 Punkte

Für ein metrisches Merkmal X wurden 30 Beobachtungen erfasst. Für X ergibt sich die empirische Verteilungsfunktion F mit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 4 \\ 0.2 & \text{für } 4 \leqq x < 8 \\ 0.4 & \text{für } 8 \leqq x < 12 \\ 0.4 & \text{für } 12 \leqq x < 15 \\ 0.7 & \text{für } 15 \leqq x < 22 \\ 0.9 & \text{für } 22 \leqq x < 24 \\ 1 & \text{für } x \geq 24 \end{cases}$$

a) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten Häufigkeiten.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der angegebenen empirischen Verteilungsfunktion

(1) den Modus des Merkmals X.

(2) die relative Häufigkeit der Ausprägung 21.

(3) die absolute Häufigkeit der Ausprägung 15.

Für die Teilaufaben c) bis e) sei ein weiteres metrisches Merkmals Y mit ebenfalls $n = 30$ Beobachtungen gegeben. Für Y sind die Ausprägungen a_i und die relativen Häufigkeiten $f(a_i)$ in der folgenden Tabelle aufgeführt:

a_i	3	6	16	22	25
$f(a_i)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

c) Bestimmen Sie den Median von Y.

d) Bestimmen Sie die kumulierte relative Häufigkeit für die Ausprägung 17.

e) Berechnen Sie den Anteil der Beobachtungen von Y, an denen eine Ausprägung von mindestens 12, aber weniger als 23 vorliegt.

Für Teilaufgabe f) ist folgende Tabelle zu den Daten der Urliste $x_1, \ldots, x_7$ gegeben.

k	1	2	3	4	5	6	7
x_k	2	2	4	8	8	10	10
p_k	$2/44$	$2/44$	$4/44$	$8/44$	$8/44$	$10/44$	$10/44$
v_k	$2/44$	$4/44$	$8/44$	$16/44$	$24/44$	$34/44$	1
u_k	$1/7$	$2/7$	$3/7$	$4/7$	$5/7$	$6/7$	1

f) Bestimmen Sie die Knickstellen der zugehörigen Lorenzkurve.
(*Hinweis*: Die Lorenzkurve muss nicht gezeichnet werden)

Lösungshinweis:

3 a)

a_k	4	8	15	22	24
f_k	0.2	0.2	0.3	0.2	0.1
h_k	6	6	9	6	3

3 b) (1) $x_{\text{Mod}} = 15$, da maximale relative Hfk.

(2) $h(21) = 0$, (3) $h(15) = 0.3$

3 c) Sortierte Urliste x_i: 3 3 3 6 6 6 6 6 6 6 6 6 16 16 16 16 16 16 22 22 22 22 22 22 25 25 25 25 25 25

n gerade $\Rightarrow y_{\text{Med}} = \frac{1}{2}(y_{(15)} + y_{(16)}) = 16$

3 d) $F(17) = 0.6$

2 e) ~~$F(22) - F(11) = F(22) - F(8) = 0.9 - 0.4 = 0.5$~~
~~oder: $h(22) + h(15) = 0.2 + 0.3 = 0.5$~~ 0.4

2 f) Knickstellen bei k=2,3,5

nur alte PO

Aufgabe 6 — 12 Punkte

Ein Hersteller von Überraschungseiern wirbt mit folgender (zutreffenden) Aussage:

„In jedem zehnten Ei ist jetzt ein kleiner Schlumpf.“

In allen anderen Eiern befinden sich für Schlumpf-Sammler wertlose Plastikbausätze. Gehen Sie davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Schlumpf zu enthalten, für jedes Überraschungsei gleich groß ist.

Mäxchen ist passionierter Schlumpf-Sammler. Um seine Schlumpfsammlung zu vergrößern, will er eine bestimmte Anzahl Überraschungseier kaufen.

a) Mäxchen kauft 10 Überraschungseier, die er zufällig aus den im Supermarkt angebotenen auswählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit diesem Einkauf mindestens ein Ei mit Schlumpf erworben hat?

b) Wie viele Überraschungseier müsste Mäxchen kaufen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mindestens ein Überraschungsei mit Schlumpf befindet, nicht kleiner als 95 % sein soll?

a) $X \hat{=}$ „Anzahl Schlümpfe in 10 Eiern“ $\quad X \sim B(10, 0.1)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} = 1 - 0.9^{10} \approx 0.6513$ 6

b) $1 - 0.9^n \geq 0.95 \Leftrightarrow 0.9^n \leq 0.05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.9} \approx 28.43$

also mind 29 6